ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2015/16

1. Dimostrare che uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito.

2. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

   (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (con la topologia concreta) è compatto;

   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (con la topologia discreta) è compatto;

   (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey) è compatto.

3. (4.24 Manetti) Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.

4. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme
$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n > 0 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

   (a) X è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$? E in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

   (b) In entrambi i casi, qual'è la chiusura di X?

   (c) $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

   (d) $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

5. Un'applicazione tra due spazi di Hausdorff è continua se e solo se il grafico Γ_f è chiuso nel prodotto.

6. Sia X uno spazio topologico, e un punto ∞ non appartenente a X. Sia $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$. Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di $\widehat{X}$
$$\mathcal{T} := \{\mathcal{U}, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\widehat{X} \setminus K, K \text{ chiuso e compatto in } X\}$$
è una topologia su $\widehat{X}$ (X con questa topologia è la compattificazione di Alexandroff di X).