Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 2

a.a. 2015/2016

1. Sia $f\colon (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
   (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;
   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;
   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.

2. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiusa).

3. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y
$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$
   (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y.
   (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y.
   (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.

4. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (d) Un'applicazione lineare tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ (con la topologia euclidea) è chiusa.
   (e) Un'applicazione lineare iniettiva tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ (con la topologia euclidea) è chiusa.

5. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X.

6. Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.
   (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.
   (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da
$$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$
   è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.

(c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

(d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f\colon X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X.

7. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ le funzioni definite ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ x \text{ se } x < 1. \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x > 1 \\ x \text{ se } x \leq 1. \end{cases}$$

Si discuta la continuità di f e di g.

8. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

9. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = R \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

$$(x, a) \sim (y, b) \text{ se } (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

10. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico $X \longrightarrow X/S$ è chiusa/aperta se S è chiuso/aperto in X. Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).

11. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso unitario e $S^1 \subset D$ la circnferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio D/S^1 in cui S^1 è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera S^2.

12. Uno spazio si dice *normale* se i punti sono chiusi (è T1) e dati due qualunque chiusi disgiunti $C, D \subset X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tali che $C \subseteq \mathcal{U}, D \subseteq \mathcal{V}$. Sia X uno spazio normale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente X/C è normale.

13. Si dotino $[-1, 1]$ e $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1, 1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi\colon X \longrightarrow X/Y$ la proiezione canonica sul quoziente. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.

(a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?

(b) Lo spazio X/Y è normale?

(c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?

(d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?

(e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.