Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 1

a.a. 2015/2016

1. La famiglia $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ è una topologia su $\mathbb{R}$?
2. Dimostrare che su un insieme X la topologia finita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.
3. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.
4. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle.
5. Quali di queste funzioni sono delle metriche? (dimostrare che lo sono oppure esibire un controesempio). Stabilire quali delle condizioni di metrica sono soddisfatte e quali no.
   (a) $d(x, y) = |x - 4y|$ su $\mathbb{R}$;
   (b) $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$ su $\mathbb{R}$;
   (c) $d(x, y) = \exp(|x - y|) - 1$ su $\mathbb{R}$;
   (d) $d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_1| + \frac{1}{5}|x_2 - y_2|$, su $\mathbb{R}^2$, (dove $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{y} = (y_1, y_2)$);
   (e) $d(\underline{x}, \underline{y}) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$ su $\mathbb{R}^2$.
6. Stabilire quali delle funzioni che sono metriche in (5) sono topologicamente equivalenti alla metrica euclidea.
7. Dimostrare che la distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ è una distanza (è il lemma di Cauchy-Schwarz).
8. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
   - $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
   - $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i\{|x_i - y_i|\}$.

   (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;
   (b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;
   (c) Le metriche d e d' sono topologicamente equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$?
9. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica eulcidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono una base per la topologia euclidea.
   (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;
   (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;
   (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la funzione $d' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}, \text{ per ogni } x, y \in X.$$

   (a) Dimostrare che d' è una metrica su X tale che $d'(x,y) < 1$ $\forall x, y \in X$ (d' si chiama normalizzazione della metrica d).
   (b) Dimostrare che d e d' sono topologicamente equivalenti.
   (c) Dimostrare che non esistono due numeri reali a e b tali che per ogni $x, y \in X$ vale che

$$ad(x,y) \leq d'(x,y) \leq bd(x,y).$$

11. Quali di questi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono aperti rispetto alla metrica euclidea? Quali chiusi?

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 > 4\}$
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{Q}\}$
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \notin \mathbb{Q}\}$
   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \notin \mathbb{N}\}$

12. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1, |y| < 2\}$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di X sono aperti rispetto alla metrica indotta su X da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$? Quali sono chiusi?

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq 1, |y| < \frac{1}{2}\right\}; \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}; \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0, |x| \leq 1\}; \\ D &= B \cup C. \end{aligned}$$

13. Sia X l'insieme

$$X = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

   Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

   (a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d:

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$
$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$
$$C := \{f \in X \mid f \text{ è derivabile}\}.$$

14. Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi
$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$
   (a) Dimostrare che gli U_n, al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X.
   (b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T2? I suoi punti sono chiusi?
   (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

15. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

16. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

17. Sia X uno spazio topologico e $S \subseteq X$ un sottospazio. Si dimostri che per ogni sottoinsieme $T \subseteq S$, la chiusura di T in S è l'intersezione della chiusura di T in X con S.

18. Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *non* è una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

19. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che
$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \overline{S}.$$
(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

20. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Sia $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di I con le seguenti topologie:
   (a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;
   (b) La topologia concreta $\mathcal{C}$;
   (c) La topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);
   (d) La topologa euclidea $\mathcal{T}_e$;
   (e) La topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;
   (f) La topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$.

21. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme. Definiamo la funzione $d_S : X \longrightarrow \mathbb{R}$ in questo modo: $d_S(x) = \inf_{y \in S}\{d(x, y)\}$. Dimostrare che
   (a) la funzione d_S è continua;
   (b) vale che $d_S(x) = 0$ se e solo se $x \in \overline{S}$.

22. Dimostrare che ogni sottospazio di uno spazio Tj è Tj per $j = 0, 1, 2$.