Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 27 luglio 2016

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo, se falso esibite un controesempio]

   (a) Uno spazio metrizzabile è T2. *Vero: sia X uno spazio metrizzabile e d una metrica su X che induce la topologia. Siano $x, y \in X$ due punti distinti. Se consideriamo le bolle aperte $B_r(x)$ e $B_r(y)$ con $r = \frac{d(x,y)}{2}$, abbiamo che $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ (per la disuguaglianza triangolare).*

   (b) Uno spazio T2 è metrizzabile. *Falso: la retta di Sorgenfrey è uno spazio T2 non metrizzabile. Infatti abbiamo visto a lezione che non è due numerabile ma possiede un sottoinsieme denso numerabile ($\mathbb{Q}$).*

   (c) Uno spazio metrizzabile è uno-numerabile. *Vero: sia X uno spazio metrizzabile e d una metrica su X che induce la topologia. Dato $x \in X$ la famiglia $\left\{B_{1/n}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di intorni di x.*

2. (a) La famiglia $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ è una topologia su $\mathbb{R}$? *No: ad esempio l'insieme $(-\infty, 1) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$ è unione di elementi della famiglia ma non appartiene alla famiglia.*

   E' vero che è la più piccola topologia generata da $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}_-$, i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. *No: una topologia generata da $\mathcal{F}$ deve contenere gli elementi di $\mathcal{F}$ come aperti.*

   (b) Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti rispetto a $\mathcal{T}_-$:

   $$A = (0, 1),\ B = [0, 1),\ C = (0, +\infty),\ D = [0, +\infty),\ E = (-\infty, 1),\ F = (-\infty, 1].$$

   Solo l'ultimo insieme è compatto rispetto a $\mathcal{T}_-$. Verifichiamolo: ad esempio la famiglia $\left\{(-\infty, 1 - \frac{1}{n})\right\}$ è un ricoprimento aperto di A, B ed E dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. La famiglia $\{(-\infty, n)\}$ è un ricoprimento aperto di C e D dalla quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Invece per quanto riguarda F: se $\mathcal{A}$ è un ricoprimento aperto di F, deve esistere $A \in \mathcal{A}$ un aperto che contiene 1. Allora questo aperto è della forma $(-\infty, a)$ con $a > 1$, dunque la sottofamiglia di $\mathcal{A}$ formata da questo solo aperto è un sottoricoprimento finito (in effetti composto da un solo elemento) di F estratto da $\mathcal{A}$.

   (c) Stabilire inoltre se le funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x$ da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ in se' sono continue. *Una funzione è continua se e solo se la controimmagine di aperti è aperta. Sia dato $\mathcal{U}$ aperto di $\mathcal{T}_-$: dunque $\mathcal{U}$ è della forma $(-\infty, a)$.*

   Abbiamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty, a)) = (-\infty, a^{1/3}) \in \mathcal{T}_-$, dunque f è continua. Invece $g^{-1}((-\infty, a)) = (-a, +\infty) \notin \mathcal{T}_-$, dunque g non è continua.

3. Sia $\{A_k\}, k \in \mathbb{N}$ una famiglia di sottospazi di uno spazio topologico X. Si assuma che

   (a) ogni A_k è connesso per archi;

   (b) $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Si provi che $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ è connesso per archi. *Siano $x, y \in A$. Devo dimostrare che esiste un cammino continuo $\alpha\colon [0,1] \to A$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Siano $k, h \in \mathbb{N}$ tali che $x \in A_k$ e $y \in A_h$. Non è limitativo supporre che $k \geq h$, dunque diciamo che $h = k + n$ con $n \in \mathbb{N}^{\geq 0}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ abbiamo per ipotesi che esiste un $a_i \in A_{k+i} \cap A_{k+i+1}$, dove poniamo $x = a_1$ e $y = a_{n-1}$. Inoltre esiste un cammino continuo $\alpha_i\colon [0,1] \to A_{k+i}$ tale che $\alpha_i(0) = a_i$ e $\alpha_i(1) = a_{i+1}$. Consideriamo dunque il prodotto di questi cammini $\alpha := \alpha_1 \star (\alpha_2 \star (\ldots \alpha_n))$, dove ricordiamo che il prodotto di due cammini α e β è definito come*

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \text{ per } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) \text{ per } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

α è dunque un cammino da x a y.

4. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = z = 0\}$, con la topologia indotta da quella euclidea. Dimostrare che è omotopicamente equivalente a S^1. Qual'è dunque il suo gruppo fondamentale? *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un suo sottospazio. Se Y è un retratto di deformazione di X allora X e Y sono omotopicamente equivalenti. Sia π il piano $y = 0$ in $\mathbb{R}^3$, e consideriamo il sottospazio $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y = 0\}$. Questo sottospazio è omeomorfo a $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (tramite l'omeomorfismo $(x, y, z) \mapsto (x, z) \in \mathbb{R}^2$.*

   Vediamo che Y è un retratto di deformazione di X. Prima consideriamo il sottospazio $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \setminus \{(0, 0, 0\}$. Questo è un retratto di deformazione di X. Infatti, l'applicazione $R\colon X \times I \to X$ definita così: $R((x, y, z), t) = (x, ty, z)$ è una omotopia tra id_X e la composizione dell'applicazione $r(x, y, z) = (x, 0, z)$ con l'inclusione $Z \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

   Ora dimostriamo che Z ha Y come retratto di deformazione: l'applicazione $S\colon Z \times I \to Z$ definita da $S((x, 0, z), t) = (1-t)(x, 0, z) + t\frac{(x,0,z)}{\sqrt{x^2+z^2}}$ dà' un'omotopia tra id_Z e la composizione di $s(x, 0, z) = \frac{(x,0,z)}{\sqrt{x^2+z^2}}$ con l'inclusione $Y \hookrightarrow Z$, dunque fornisce una retrazione di deformazione tra Y e Z.

   La composizione di queste due retrazioni è la retrazione di deformazione che cercavamo (tra l'altro sono retrazioni forti).

   Infine osserviamo che due spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi. Dunque $\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (dove omettiamo il punto base perchè sono spazi connessi per archi).