Corso di Istituzioni di Geometria Superiore
Università dell'Insubria
28 giugno 2018

1. Siano $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X_2$ due rivestimenti.
   (a) Mostrare che $p := p_1 \times p_2\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento. *[2 punti]*
   (b) Dati $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, scrivere il gruppo fondamentale di $X_1 \times X_2$ con punto base (x_1, x_2) in funzione dei gruppi fondamentali $\pi_1(X_1, x_1)$ e $\pi_1(X_2, x_2)$. *[2 punti]*
   (c) Dati $\widetilde{x_1} \in p_1^{-1}(x_1), \widetilde{x_2} \in p_2^{-1}(x_1)$, com'è fatto il sottogruppo $p_*(\pi_1(\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2, (\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2})))$ di $\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$ in funzione dei sottogruppi $(p_1)_*\pi_i(\widetilde{X}_1, \widetilde{x_1}) \leqslant \pi_1(X, x_1)$ $(p_2)_*\pi_i(\widetilde{X}_2, \widetilde{x_2}) \leqslant \pi_1(X, x_2)$? *[2 punti]*
   (d) Supponiamo che sia p_1 sia p_2 siano normali; Il rivestimento p risulta essere normale? Vale anche il viceversa? *[2 punti]*
   (e) Fare un esempio di uno spazio prodotto e di un suo rivestimento che non sia un rivestimento prodotto. *[3 punti]*

2. Siano X e Y due spazi topologici connessi e localmente contraibili (cioè tali che per ogni punto e per ogni suo intorno esiste un intorno contraibile). Siano $p \in X$ e $q \in Y$, e sia Z lo spazio ottenuto incollando p e q: dunque $Z = X \sqcup Y/\sim$ dove dati $z, w \in X \sqcup Y$ $z \sim w$ se e solo se $z = w$ oppure $\{z, w\} = \{p, q\}$.
   (a) Verificare che Z è connesso e localmente contraibile. *[2,5 punti]*
   (b) Calcolare il gruppo fondamentale di Z in funzione di quelli di X e di Y. *[4 punti]*
   (c) Sotto quali condizioni il gruppo fondamentale di Z è abeliano? *[3 punti]*
   (d) Z ammette rivestimento universale? *[2,5 punti]*
   (e) Consideriamo il caso in cui $X = S^1$ e Y sia S^2. Com'è fatto il rivestimento universale? *[2 punti]*

3. Siano $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ due complessi finiti in $\mathbb{R}^N$ che hanno un vertice in comune (cioè tali che $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \{v\}$).
   (a) Verificare che $\mathcal{H} := \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ è un complesso finito in $\mathbb{R}^N$. *[2 punti]*
   (b) Calcolare l'omologia di $\mathcal{H}$ in funzione di quella di $\mathcal{K}$ e di $\mathcal{L}$. *[5 punti]* [per l'H_1 vorrei sia una dimostrazione diretta sia una dimostrazione che usi il punto (2b)]