ESERCIZI 5

L. Stoppino, S. Torelli, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. (Senersi Geo 1, Es.28.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, determinare la chiusura proiettiva e i punti impropri.
   (a) $x + 2y^2 - 1 = 0$;
   (b) $x^2y^2 - 1 = 0$;
   (c) $3y + xy + xy^2 = 0$;
   (d) $x^2y - xy^2 + x^2 - y = 0$.
2. (Senersi Geo 1, Es.28.2) Stabilire quali delle seguenti curve in $\mathbb{E}^2$ sono simmetriche rispetto all'origine o rispetto agli assi coordinati.
   (a) $xy + y^2 - y = 0$;
   (b) $x = y = xy = 0$;
   (c) $1 + x^2 + y^2 = 0$
3. (Senersi Geo 1, Es.30.1) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare rango ed equazione canonica.
   (a) $x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2 = 0$;
   (b) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$;
   (c) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$.
4. (Senersi Geo 1, Es.30.2) Date le coniche dell'esercizio precedente, vederle come coniche complesse in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e determinare rango ed equazione canonica.
5. (Senersi Geo 1, Es.31.2) Per ciascuna delle seguenti coniche di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, stabilire:
   - se sono a centro, e nel caso, e coordinate del centro.
   - Classificarle, cioè trovare l'equazione canonica.
   (a) $x^2 + y^2 + xy + x + y = 1$;
   (b) $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 10 = 0$;
   (c) $x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0$;
   (d) $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10 = 0$;
   (e) $2y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.
6. (Senersi Geo 1, Es.31.3) Si considerino le coniche dell'esercizio precedente, e le si classifichi dal punto di vista euclideo, trovando per ciascuna di esse un'equazione canonica ed una isometria che trasforma la conica in forma canonica.

7. (Esame 9 luglio 2019) Dato un sistema di riferimento cartesiano in un piano euclideo $\mathbb{E}^2$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione:

$$\mathcal{C}\colon 2x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 1 = 0.$$

   (a) Classificarla dal punto di vista affine e trovare l'equazione canonica. È una conica a centro? Se sì trovare le coordinate del centro.
   (b) Classificarla dal punto di vista euclideo: trovare la forma canonica e un cambiamento di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.
   (c) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, e trovare, se esistono i punti impropri.

8. (Esame del 21 gennaio 2020) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\mathcal{C}\colon 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ nel piano euclideo E^2.

   (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{E}^2$.
   (b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma tale equazione.
   (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e se ne calcolino i punti impropri.

9. (Esercizio Pirola compito 16/06/2017) Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_a$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y) \mid 2x^2 + 6axy + 9ay^2 + 2y + 6 = 0,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Dare la classificazione affine delle coniche $\mathcal{C}_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Dire se per qualche valore di $a \neq 0$ $\mathcal{C}_a$ è equivalente dal punto di vista affine e/o euclideo a $\mathcal{C}_0$.

10. (Esercizio Pirola compito 05/09/2017) Sia Oxy un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ di dimensione 2. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_a$, dipendenti dal parametro $a \in \mathbb{R}$, definite rispetto al riferimento, dalle equazioni:

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y) \mid x^2 + 10axy - 25ay^2 - 2y = 0,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Dare la classificazione affine delle coniche $\mathcal{C}_a$ della famiglia.
   (b) Dire quali valore di $a \neq 0$ la conica $\mathcal{C}_a$ è equivalente dal punto di vista affine ed euclideo a $\mathcal{C}_0$.

11. Si consideri la conica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{C}\colon x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 = 0$$

   (a) Siano $\mathcal{C}_i$ le coniche affini corrispondenti a $\mathcal{C}$ nelle carte affini $\mathcal{U}_i$, per $i = 0, 1, 2$. Classificarle dal punto di vista affine.
   (b) Rappresentare con un disegno il supporto di $\mathcal{C}$ insieme con le rette $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.