Topologia - ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Siano $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie sullo stesso insieme X, con $\mathcal{T}_1$ meno fine di $\mathcal{T}_2$, cioè $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Quali delle seguenti due implicazioni sono valide?

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto}.$$

2. Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio compatto è finito.

3. Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{3}\}$ è chiuso e limitato in $\mathbb{Q}$ (con d_e metrica euclidea e con la topologia da essa indotta) ma non è compatto.

4. Siano $a < b$ numeri reali.
   (a) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto esibendo un suo ricprimento aperto che non possiede sottoricoprimenti finiti.
   (b) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto per successioni esibendo una successione in $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ che non abbia sottosuccessioni convergenti in $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
   (c) Dimostrare che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è numerabilmente compatto esibendo un sottoinsieme $Z \subseteq [a, b] \cap \mathbb{Q}$ infinito privo di punti di accumulazione.

5. Mostrare che l'unione di un numero finito di sottospazi compatti di uno spazio topologico è compatta.

6. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $p \in S^n$, lo spazio S^n non è omeomorfo a $S^n \setminus \{p\}$.

7. Dimostrare che uno spazio con la topologia discreta è compatto se e solo se è finito.

8. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ per ogni $n > 0$. (sugg: Esempio 4.64. del Manetti).

9. Mostrare che un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Mostrare che il viceversa non vale in generale (ma per la metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$ sì!).

10. Vero o falso? [se vero dimostratelo, se falso esibite un controesempio]
    (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
    (b) Un sottospazio aperto di uno spazio compatto è compatto.
    (c) Un sottospazio compatto di uno spazio T2 è chiuso.
    (d) Un sottospazio compatto di uno spazio T1 è chiuso.
    (e) Un sottospazio compatto di uno spazio T0 è chiuso.

11. Siano K, L due sottospazi compatti di uno spazio di Hausdorff X. Mostrare che esistono due aperti U, V in X tali che $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

12. (a) Dimostrare che uno spazio compatto e T2 è normale;

    (b) Sia X uno spazio normale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente X/C è normale.

13. Sia $\mathcal{T}_e$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme
$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

    (a) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?

    (b) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

    Stesse domande con $Y := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}$.

14. Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici compatti e T2. Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico Γ_f è chiuso nel prodotto $X \times Y$.

15. Sia $f \colon X \to Y$ mappa quoziente; X compatto e T2. Mostrare che sono equivalenti:

    (a) Y è T2;

    (b) f è chiusa;

    (c) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$.

16. Sia X uno spazio metrico. Siano $C, D \subseteq X$ chiusi non vuoti. Poniamo
$$d(C, D) := \inf\{d(x, y), x \in C, y \in D\}.$$
    Dimostrare che se C oppure D sono compatti, allora $d(C, D) \neq \emptyset$ se e solo se $C \cap D \neq \emptyset$. Fare un esempio in cui $d(C, D) = 0$ ma $C \cap D = \emptyset$.

17. Data un'applicazione continua $f \colon X \to Y$ che sia chiusa con Y compatto e con fibra compatta, dimostrare che X è compatto.

18. Siano X, Y spazi topologici compatti, con Y T2. Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $q \colon X \times Y \to Y$ è chiusa.

19. Si consideri la seguente famiglia su $\mathbb{R}$: $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

    (a) Si verifichi che è una topologia su $\mathbb{R}$.

    (b) Si stabilisca se è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$.

    (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto?

    (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso?

20. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia della continuità superiore $\mathcal{T}_+$, i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti rispetto a $\mathcal{T}_+$:

$$A = (0,1),\ B = [0,1),\ C = (0,+\infty),\ D = [0,+\infty),\ E = (-\infty,1),\ F = (-\infty,1].$$

21. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

    (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (con la topologia concreta) è compatto;

    (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (con la topologia discreta) è compatto;

    (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (con la topologia euclidea) è compatto;

    (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey) è compatto.

    Discutere le stesse affermazioni con il sottospazio $[0,1]$ ed il sottospazio $[0,1)$.

22. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Definiamo la compattificazione di Alexandroff di X come l'insieme

$$X^\star := X \cup \{\infty\},$$

    ottenuto aggiungendo ad X un punto ∞, con la topologia definita come segue: $A \subseteq X$ è aperto se e solo se $A \subseteq X$ è un aperto di X, oppure A ̀della forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, dove K ̀compatto in X.

    (a) Verificare che quella definita è una topologia su $X^\star$.

    (b) Dimostrare che X è uno spazio topologico compatto e che, se X è non compatto, allora $X^\star$ contiene X come sottospazio denso.

    (c) Dare un esempio di due spazi topologici non omeomorfi X e Y tali che $X^\star$ e $Y^\star$ siano omeomorfi.

23. Dimostrare che tutte le rette e le coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono compatte. Dimostrare che le coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono omeomorfe a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ oppure all'unione di due rette in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.