Topologia- ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiuso).

2. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ il sottospazio (a, b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ i sottospazi $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$. Dunque questi sottospazi sono tutti nella stessa classe di omeomorfismo. Dimostrare che anche i sottospazi $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ sono omeomorfi tra loro. Vedremo che però non sono omeomorfi ai primi.

3. Siano $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi topologici.

   (a) Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathcal{T}$ tale che $\cup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ (una tale famiglia si chiama ricoprimento aperto di X). Siano $f_A \colon A \to Y$ applicazioni tali che per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, per ogni $x \in A \cap B$ vale che $f_A(x) = f_B(x)$. Dimostrare che l'applicazione $f \colon X \to Y$ definita come $f(x) := f_A(x)$ per un A tale che $x \in A$ è ben definita e che è continua se e solo se sono continue le $f_A \colon (A, \mathcal{T}_{|A}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$.

   (b) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia finita chiusi di $\mathcal{T}$ tale che $\cup_{F \in \mathcal{F}} F = X$ (una tale famiglia si chiama ricoprimento chiuso finito di X). Siano $f_F \colon F \to Y$ applicazioni tali che per ogni $F, D \in \mathcal{F}$, per ogni $x \in F \cap D$ vale che $f_F(x) = f_D(x)$. Dimostrare che l'applicazione $f \colon X \to Y$ definita come $f(x) := f_F(x)$ per un F tale che $x \in F$ è ben definita e che è continua se e solo se sono continue le $f_F \colon (F, \mathcal{T}_{|F}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$.

4. Dimostrare che due rette in $\mathbb{R}^2$ (con la topologia indotta da quella euclidea) sono sempre omeomorfe tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

5. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

6. (Manetti 3.49) Siano $f \colon X \to Y$ e $g \colon Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo
$$f \times g \colon X \times Z \to Y \times W$$
$$(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z)).$$

   (a) Provare che se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.

   (b) Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.

   (c) Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.

7. Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici. Diciamo che f è un omeomoerfismo locale se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) = V$ è un aperto e $f_{|U} \colon U \to V$ è un omeomorfismo.

(a) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

(b) Dimostrare che le fibre (le controimmagini di punti in Y) sono sottospazi discreti di X.

8. (Manetti 3.51) Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

9. Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su Y.

10. Sia $F \subseteq \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme (che dotiamo della topologia di sottospazio indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^3$. Sia $R_F \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio che ottengo ruotando F intorno all'asse z cioè:

$$R_F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z) \in F\}.$$

Dimostrare che R_F è omeomorfo a $F \times S^1$.

11. Indichiamo con $\mathbb{R}_S$ la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

(a) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x + y = 0\}$ è discreto.

(b) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x - y = 0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}_S$.

(c) Considerando in generale una retta r passante per l'origine, stabilire quando (a seconda della pendenza) r con la topologia indotta è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ e quando è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.

12. Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua suriettiva. Poniamo

$$R = \{(x, x') \mid f(x) = f(x')\} \subseteq X \times X.$$

(a) Dimostrare che se Y è di Hausdorff R è un chiuso in $X \times X$.

(b) Dare un esempio in cui R è un chiuso ma Y non è di Hausdorff.

(c) Mostrare che se R è chiuso in $X \times X$ e f è aperta allora Y è di Hausdorff.

13. (a) Dimostrare che un sottospazio di uno spazio Ti è Ti per $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Dimostrare che un sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale.

(c) Dimostrare che lo stesso non vale per la proprietà T4 (sugg. provare a prendere topologie opportune su insiemi finiti).

14. Dimostrare che uno spazio topologico X con un numero finito di elementi che sia T1 ha la topologia discreta. Pertanto è T2, T3, T4.

15. (Esercizio 3.59 del Manetti): Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{I}(x)} \overline{N}.$$

16. Dimostrare che uno spazio topologico X è T0 se e solo se punti distinti hanno chiusure distinte.

17. La topologia dell'intervallo annidato (nested interval topology). Sia $X = (0,1)$ Consideriamo su X la topologia: $\mathcal{T} := \{(0, 1-1/n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\emptyset, X\}$ (verificare che è una topologia). Dimostrre che $(X, \mathcal{T})$ soddisfa l'assioma T4 ma non il T0 (nè dunque il T1 e T2) nè il T3:

18. (a) Dimostrare che se X e Y sono due spazi Ti allora $X \times Y$ è Ti per $i = 0, 1, 2, 3$.
    (b) Dimostrare che vale anche il viceversa.

19. (a) Dimostrare che se il prodotto di due spazi $X \times Y$ è T4, allora sia X sia Y sono T4.
    (b) Non vale il viceversa: dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è T4 (si veda il Sernesi).

20. (a) Dimostrare che X è T3 se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno V di x esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.
    (b) Dimostrare che X è T4 se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni aperto V tale che $C \subseteq V$ esiste un aperto U tale che $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

21. Sia X uno spazio topologico, sia Y un insieme. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Sia $\mathcal{T}_f$ la topologia quoziente su Y. Dimostrare che $C \subseteq Y$ è chiuso per $\mathcal{T}_f$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

22. Siano X e Y spazi topologici e sia $p\colon X \times Y \to X$ la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
    (a) l'applicazione p è aperta;
    (b) l'applicazione p è chiusa;
    (c) lo spazio X è omeomorfo al quoziente $X \times Y/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $x = x'$.

23. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un esempio di un sottospazio $Y \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Y$ sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio $Z \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Z$ non sia di Hausdorff.

24. Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ mappe quozienti. Allora la composizione $g \circ f$ è una mappa quoziente.

25. (Munkres Ch.2, sec.22: esistono applicazioni quoziente aperte e non chiuse, chiuse e non aperte e nè aperte nè chiuse).

(a) Siano $X := [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$, $Y := [0,2] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea $\mathcal{T}_e$. Definiamo un'applicazione $p\colon X \to Y$:

$$p(x) := \begin{cases} x \text{ se } x \in [0,1] \\ x-1 \text{ se } x \in [2,3] \end{cases}$$

Verificare che p è continua chiusa e suriettiva (dunque è un'identificazione chiusa) ma non aperta.

(b) Sia $p\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore (con topologia euclidea). Verificare che p è un'identificazione aperta ma non chiusa.

(c) Sia $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il sottospazio

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ oppure } y = 0 \text{ o entrambi}\}.$$

Dimostrare che $p_{|A}\colon A \to \mathbb{R}$ è una mappa quoziente (un'identificazione) che non è nè aperta nè chiusa.

26. Sia $X = [0,1]$ con la relazione di equivalenza definita da $x \sim y$ se $x = y$ oppure $\{x,y\} = \{0,1\}$.

    (a) Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1, e che la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/\sim$ è un'identificazione chiusa.

    (b) Dimostrare che la restrizione a $[0,1)$ dell'applicazione $\pi\colon X \to X/\sim$ è biettiva e continua ma non è un omeomorfismo di $[0,1)$ su $X/\sim$ (in altre parole $\pi_{|[0,1)}$ non è un'identificazione).

27. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

28. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = \mathbb{R} \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

    $$(x,a) \sim (y,b) \text{ se } (x,a) = (y,b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

    Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

29. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico $X \longrightarrow X/S$ è chiusa/aperta se S è chiuso/aperto in X. Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).

30. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso unitario e $S^1 \subset D$ la circonferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio D/S^1 in cui S^1 è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera S^2.

31. Si dotino $[-1,1]$ e $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1,1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi\colon X \longrightarrow X/Y$ la contrazione di Y ad un punto. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.

(a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?

(b) Lo spazio X/Y è normale?

(c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?

(d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?

(e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.

32. Sia T il toro ottenuto come identificazione di figura piana $Q/\sim$ dove $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $\{x, x'\} = \{\pm 1\}$ e $y = y'$, oppure $\{y, y'\} = \{\pm 1\}$ e $x = x'$. Dimostrare che $T \sim S^1 \times S^1$.

33. (Manetti, 5.12): esempio di identificazioni il cui prodotto non è una identificazione.

    Sia $f: \mathbb{R} \to X$ una identificazione tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni $x + y = n + \sqrt{2}/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

    (a) f è una identificazione chiusa;

    (b) C è chiuso ed è saturo rispetto a $f \times Id: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to X \times \mathbb{Q}$.

    (c) $(f \times Id)(C)$ non è chiuso nella topologia prodotto;

    (d) $f \times Id$ non è una identificazione.

34. (Manetti 6.1) Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea come al solito): $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che lo spazio quoziente $\mathbb{R}/\sim$ non è primo numerabile. (Quindi essere 1-numerabile non è una proprietà che passa al quoziente)