ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2020/21

1. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3. Dimostrare che tre piani distinti Π_1, Π_2, Π_3 si incontrano sempre in almeno un punto. Generalizzare a n iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione n.

2. Dati 5 punti in posizione generale in $\mathbb{P}^3_K$, è vero che essi sono a tre a tre non allineati? Viceversa, se prendo 5 punti in $\mathbb{P}^3_K$ a tre a tre non allineati, essi sono in posizione generale?

3. (Sernesi 1, 25.9) Dimostrare che dati n punti P_i in posizione generale in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ di dimensione n (quindi i punti sono linearmente indipendenti in questo caso) se consideriamo un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}$ e delle coordinate proiettive per i punti $P_i = [p^i_0, \dots, p^i_n]$, verificare che una equazione per $L(P_1, \dots P_n)$ la seguente:
$$\begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ p^1_0 & \dots & p^1_n \\ & \dots & \\ p^n_0 & \dots & p^n_n \end{vmatrix} = 0$$

4. Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$
$$[1, 1, 1],\ [3, 1, 0],\ [1, -\frac{1}{3}, -1]$$
sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

5. (dall'esame del 10 settembre 2019) Si considerino in $P^3_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 = [1, 0, 1, 2], P_2 = [0, 1, 1, 1], P_3 = [2, 1, 2, 2], P_4 = [1, 1, 1, 0]$.
   (a) Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
   (b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.
   (c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

6. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.6) Siano A, B, C, D punti di $\mathbb{P}^2_K$ in posizione generale e siano $P = L(A, B) \cap L(C, D)$, $Q = L(A, C) \cap L(B, D)$, $R = L(A, D) \cap L(B, C)$. Si mostri che P, Q, R non sono allineati.

7. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.10) Siano r_1, r_2, r_3 rette di $\mathbb{P}^4_K$ a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano. Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia r_1, sia r_2, sia r_3.

8. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.8) Siano $r, r' \subset \mathbb{P}^3_K$ due rette sghembe e sia $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus (r \cup r')$. Si dimostri che esiste un'unica retta $l \subset \mathbb{P}^3_K$ che contiene P e che interseca sia r sia r'. Si determinino equazioni cartesiane per l nel caso in cui $K = \mathbb{R}$, $P = [0, 1, 0, 1]$, e le rette r ed r' abbiano equazioni rispettivamente:
$$r : x_0 + x_2 + x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

9. Determinare le coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive di ciascuna delle seguenti coppie di rette di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$:

   (a) $3x_0 - 4x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 + ix_0 = 0$;

   (b) $ix_0 + 2ix_2 - x_2 = (1-i)x_0 + 2x_2 = 0$.

10. Consideriamo la carta affine $\mathbb{P}^n_K \setminus H_0 \xrightarrow{j_0} \mathbb{A}^n_K$.

   (a) Dimostrare che se $P_0, \dots P_k$ sono punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n_K$, allora i $P'_i := j_0^{-1}(P_i)$ sono punti linearmente indipendenti di $\mathbb{P}^n_K$.

   (b) Dimostrare che se $Q_0, \dots Q_k$ sono punti linearmente indipendenti di $\mathbb{P}^n_K$ che non appartengono a H_0, allora $j_0(Q_i)$ sono punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n_K$.

11. In $\mathbb{P}^2_K$, considero il punto $P = [0, 0, 1]$.

   (a) Scrivere le equazioni di tutte le rette che passano per P (lo chiameremo il fascio di rette per P).

   (b) Verificare che se considero la carta affine $U_1 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a x_1, il fascio del punto precedente diventa un fascio proprio di rette in $\mathbb{A}^2_K$ (passanti da quale punto?).

   (c) Verificare che se considero la carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a x_0, il fascio del punto (a) diventa un fascio improprio di rette (di che direzione?).

12. Siano P_0, P_1, P_2 punti di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Si consideri l'inclusione $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ fatta rispetto a x_0. Discutere le seguenti affermazioni (possono essere vere o false- per verificare che false bisogna fare un controesempio):

   (a) Se P_0, P_1, P_2 sono affinemente indipendenti, allora essi sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

   (b) Se P_0, P_1, P_2 non sono affinemente indipendenti, comunque possono essere in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

   (c) Supponiamo che P_0, P_1, P_2 siano affinemente indipendenti. Sia $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$. Dato qualunque punto $Q \in \mathbb{H}_0$, i punti P_0, P_1, P_2, Q sono in posizione generale.

13. (Sernesi Geo1 Es. 27.1) Determinare la formula del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ al riferimento individuato dalle seguenti quaterne ordinate di punti:

   (a) $P_0 = [1, 1, -1]$, $P_1 = [2, 1, 0]$, $P_2 = [0, 1, 1]$, $M = [1, 1, 0]$;

   (b) $P_0 = [1, -1, 0]$, $P_1 = [0, 1, 1]$, $P_2 = [2, 0, 1]$, $M = [1, 2, 2]$;

   (c) $P_0 = [1, 1, 1]$, $P_1 = [1, 0, 1]$, $P_2 = [1, \frac{1}{2}, 0]$, $M = [4, 2, 2]$.

14. (Senersi Geo 1, Es.27.2. Attenzione! La soluzione sul Sernesi è sbagliata!) Determinare la proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti: $f([1, 1]) = [1, -1]$, $f([2, 0]) = [1, 1]$, $f([1, -1]) = [2, 1]$.

15. Siano A, B, C tre punti di un piano proiettivo $\mathbb{P}$ in posizione generale; sia r una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività f di $\mathbb{P}$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$, $f(r) = r$.

16. (Senersi Geo 1, Es.27.3) Determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che soddisfa le condizioni seguenti:
$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f([1, 2, 1]) = [1, 1, 1], \text{ dove}$$
$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad r' : x_0 + x_1 = 0, \quad s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad s' : x_1 + x_2 = 0.$$
Attenzione! Una tale proiettività non è unica, come pare suggerire il testo dell'esercizio sul Sernesi e l'esercizio si trova svolto sul Fortuna Frigerio Pardini: esercizio 2.15.

17. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.14) Siano A, A', B, B' quattro punti distinti di $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2_K$ non tutti allineati. Si dimostri che A, A', B, B' sono in posizione generale se e solo se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2_K \to \mathbb{P}^2_K$ tale che $f(A) = B, f(A') = B', f^2 = f \circ f = Id_{\mathbb{P}}$.

18. Se f è una proiettività di uno spazio proiettivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ indotta dall'isomorfismo lineare $\varphi \in GL(V)$, dimostrare le seguenti affermazioni:
    (a) $P = [v] \in \mathbb{P}$ è un punto fisso per f se e solo se v è un autovettore per φ.
    (b) Se K è algebricamente chiuso, ogni proiettività di $\mathbb{P}$ ha almeno un punto fisso.
    (c) Se $K = \mathbb{R}$ e $n = \dim \mathbb{P}$ è pari, ogni proiettività di $\mathbb{P}$ ha almeno un punto fisso.

19. (Senersi Geo 1, Es.27.4) Determinare i punti fissi delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$
    (a) $f([x_0, x_1, x_2]) = [-x_0 + 15x_1 + 6x_2, -2x_0 + 8x_1 + 2x_2, 4x_0 - 18x_1 - 5x_2]$;
    (b) $g([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 - x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2]$.

20. (Dall'esame del 13 febbraio 2020) Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 = [1, 0, 1], P_2 = [0, 1, 1], P_3 = [2, 1, 2]$.
    (a) Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $L(P_i, P_j)$ per $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e determinare le loro intersezioni a due a due. I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale?
    (b) Esibire, se esiste, una proiettività che mandi, rispettivamente, P_1 in $[1, 0, 0]$, P_2 in $[0, 1, 0]$, P_3 in $[0, 0, 1]$. Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni?
    (c) Esiste un punto $P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$? Se sì, fare un esempio e descrivere esplicitamente il luogo di tali punti.

21. (dall'esame del 21 giugno 2019) Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$: $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [1, 1, 0]$, $P_2 = [1, 1, 1]$, $P_3 = [2, 0, 1]$;
    (a) Verificare se sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale).
    (b) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f(P_i) = P_i$ Per ogni $i = 0, \dots, 3$.
    (c) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$, $f([1, 1, 1]) = P_3$.

(d) Data la proiettività f del punto precedente, trovarne il luogo fisso.

(e) Scrivere l'equazione della retta r tra P_2 e P_3. Determinare, se esistono, tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che hanno come luogo fisso r e P_0.

22. In un piano affine $\mathbb{A}$ siano date due terne di rette $\{l_1, l_2, l_3\}$ e $\{r_1, r_2, r_3\}$ ciascuna composta da tre rette a due a due non parallele e tali che non c'è nessun punto in comune a tutte e tre.

    (a) È vero che esiste sempre un'affinità $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(l_i) = r_i$ per $i = 1, 2, 3$? In caso positivo, f è unica?

    (b) Si calcoli esplicitamente una tale affinità nel caso in cui $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, con $(x, y, z) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e le equazioni cartesiane delle rette siano:

$$\begin{array}{ll} l_1 : x = 0 & \qquad r_1 : x + y = 1 \\ l_2 : y = 0 & \qquad r_2 : 2x + y = 0 \\ l_3 : x - y = 1 & \qquad r_3 : x = 1 \end{array}$$

    Si consideri ora $\mathbb{A}$ come carta affine in un piano proiettivo $\mathbb{P}$, e siano $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$ e $\{\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3\}$ le chiusure proiettive delle rette della prima terna.

    (c) Esiste una proiettività F di $\mathbb{P}$ tale che $F(\overline{l_i}) = \overline{r_i}$ per $i = 1, 2, 3$? È unica?

    (d) Si calcolino esplicitmante le possibili F nel caso del punto (b), con $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ carta affine di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ rispetto a x_0.

23. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$P_0 = [1, 0, -1],\ P_1 = [1, 2, 0],\ P_2 = [-1, -1, 1],\ P_3 = [1, -1, -2];$$

    (a) Stabilire se sono in posizione generale.

    (b) Si scriva l'equazione della retta $L(P_0, P_1)$.

    (c) Esibire, se esiste, un punto Q distinto dai precedenti tale che P_0, P_1, P_2, Q non siano in posizione generale.

    (d) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$ e $f([1, 1, 1]) = P_3$.

    (e) Esiste una proiettività che fissa P_0, P_1, P_2 e non è l'identità? Se sì, fare un esempio.

24. (Fortuna, Frigerio, Pardini, Es 2.11) Siano r e s rette distinte di $\mathbb{P}^3_K$ e sia f una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ tale che $Fix(f) = r \cup s$.

    (a) Verificare che r ed s sono sghembe.

    (b) Per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$ si denoti con l_P la retta congiungente P e $f(P)$. Si provi che, per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$, la retta l_P interseca sia r che s.