

ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Sia \mathbb{P} uno spazio proiettivo di dimensione 3. Dimostrare che tre piani distinti Π_1, Π_2, Π_3 si incontrano sempre in almeno un punto. Generalizzare a n iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione n .
2. Dimostrare che dati n punti P_i in posizione generale in uno spazio proiettivo \mathbb{P} di dimensione n (quindi i punti sono linearmente indipendenti in questo caso). Se consideriamo un riferimento proiettivo in \mathbb{P} e delle coordinate proiettive per i punti $P_i = [p_0^i, \dots, p_n^i]$, verificare che una equazione per $L(P_1, \dots, P_n)$ la seguente:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ p_0^1 & \dots & p_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ p_0^n & \dots & p_n^n \end{vmatrix} = 0$$

3. Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

$$[1, 1, 1], [3, 1, 0], [1, -\frac{1}{3}, -1]$$

sono allineati, e si determini un'equazione della retta che li contiene.

4. Siano A, B, C tre punti di un piano proiettivo \mathbb{P} in posizione generale; sia r una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività f di \mathbb{P} tale che $f(A) = A, f(B) = C, f(C) = B, f(r) = r$.
5. Si considerino in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], P_2 = [0, 1, 1, 1], P_3 = [1, \frac{1}{2}, 1, 1], P_4 = [1, 1, 1, 0].$$
 - (a) Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
 - (b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da $L(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e se ne determinino equazioni cartesiane.
 - (c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.
6. Determinare le coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive di ciascuna delle seguenti coppie di rette di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$:
 - (a) $3x_0 - 4x_1 + x_2 = 2x_1 - x_2 + ix_0 = 0;$
 - (b) $ix_0 + 2ix_2 - x_2 = (1 - i)x_0 + 2x_2 = 0.$
7. Siano A, B, C, D punti di \mathbb{P}_K^2 in posizione generale e siano $P = L(A, B) \cap L(C, D), Q = L(A, C) \cap L(B, D), R = L(A, D) \cap L(B, C)$. Si mostri che P, Q, R non sono allineati.

8. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.10) Siano r_1, r_2, r_3 rette di \mathbb{P}_K^4 a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano. Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia r_1 , sia r_2 , sia r_3 .
9. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.12) Siano $r, r' \subset \mathbb{P}_K^3$ due rette sghembe e sia $P \in \mathbb{P}_K^3 \setminus (r \cup r')$. Si dimostri che esiste un'unica retta $l \subset \mathbb{P}_K^3$ che contiene P e che interseca sia r sia r' . Si determinino equazioni cartesiane per l nel caso in cui $K = \mathbb{R}$, $P = [0, 1, 0, 1]$, e le rette r ed r' abbiano equazioni rispettivamente:

$$r : x_0 + x_2 + x_3 = 2x_0 + x_1 = 0, \quad r' : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = x_0 + x_3 = 0.$$

10. Consideriamo la carta affine $\mathbb{P}_K^n \setminus H_0 \xrightarrow{j_0} \mathbb{A}_K^n$.

- (a) Dimostrare che se P_0, \dots, P_k sono punti affinamente indipendenti di \mathbb{A}_K^n , allora i $P'_i := j_0^{-1}(P_i)$ sono punti linearmente indipendenti di \mathbb{P}_K^n .
- (b) Dimostrare che se Q_0, \dots, Q_k sono punti linearmente indipendenti di \mathbb{P}_K^n che non appartengono a H_0 , allora $j_0(Q_i)$ sono punti affinamente indipendenti di \mathbb{A}_K^n .
11. (Sernesi Geo1 Es. 27.1) Determinare la formula del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ al riferimento individuato dalle seguenti quaterne ordinate di punti:
- (a) $P_0 = [1, 1, -1], P_1 = [2, 1, 0], P_2 = [0, 1, 1], M = [1, 1, 0];$
(b) $P_0 = [1, -1, 0], P_1 = [0, 1, 1], P_2 = [2, 0, 1], M = [1, 2, 2];$
(c) $P_0 = [1, 1, 1], P_1 = [1, 0, 1], P_2 = [1, \frac{1}{2}, 0], M = [4, 2, 2].$
12. (Senersi Geo 1, Es.27.2) Determinare la proiettività di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ che soddisfa le condizioni seguenti: $f([1, 1]) = [1, -1], f([2, 0]) = [1, 1], f([1, -1]) = [2, 1].$
13. (Senersi Geo 1, Es.27.3) Determinare la proiettività di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che soddisfa le condizioni seguenti:

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f([1, 2, 1]) = [1, 1, 1], \text{ dove}$$

$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad r' : x_0 + x_1 = 0, \quad s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad s' : x_1 + x_2 = 0.$$
14. (ref: Fortuna, Frigerio, Pardini Es. 2.14) Siano A, A', B, B' quattro punti distinti di $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^2$ non tutti allineati. Si dimostri che A, A', B, B' sono in posizione generale se e solo se esiste una proiettività $f: \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ tale che $f(A) = B, f(A') = B', f^2 = f \circ f = Id_{\mathbb{P}}$.
15. Se f è una proiettività di uno spazio proiettivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ indotta dall'isomorfismo lineare $\varphi \in GL(V)$, dimostrare le seguenti affermazioni:
- (a) $P = [v] \in \mathbb{P}$ è un punto fisso per f se e solo se v è un autovettore per φ .
(b) Se K è algebricamente chiuso, ogni proiettività di \mathbb{P} ha almeno un punto fisso.
(c) Se $K = \mathbb{R}$ e $n = \dim \mathbb{P}$ è pari, ogni proiettività di \mathbb{P} ha almeno un punto fisso.
16. (Senersi Geo 1, Es.27.4) Determinare i punti fissi delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$
- (a) $f([x_0, x_1, x_2]) = [-x_0 + 15x_1 + 6x_2, -2x_0 + 8x_1 + 2x_2, 4x_0 - 18x_1 - 5x_2];$

(b) $g([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 - x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2].$

17. (Dall'esame del 23 febbraio 2020) Si considerino in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ i punti $P_1 = [1, 0, 1], P_2 = [0, 1, 1], P_3 = [2, 1, 2]$.

(a) Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $L(P_i, P_j)$ per $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e determinare le loro intersezioni a due a due. I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale?

(b) Esisbire, se esiste, una proiettività che manda, rispettivamente, P_1 in $[1, 0, 0], P_2$ in $[0, 1, 0], P_3$ in $[0, 0, 1]$. Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni?

(c) Esiste un punto $P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$? Se sì, fare un esempio e descrivere esplicitamente il luogo di tali punti.

18. (dall'esame del 10 settembre 2019) Si considerino in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ i punti $P_1 = [1, 0, 1, 2], P_2 = [0, 1, 1, 1], P_3 = [2, 1, 2, 2], P_4 = [1, 1, 1, 0]$.

(a) Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.

(b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

(c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

19. (dall'esame del 21 giugno 2019) Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$: $P_0 = [1, 0, 0], P_1 = [1, 1, 0], P_2 = [1, 1, 1], P_3 = [2, 0, 1]$;

(a) Verificare se sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale).

(b) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f(P_i) = P_i$ Per ogni $i = 0, \dots, 3$.

(c) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0, f([0, 1, 0]) = P_1, f([0, 0, 1]) = P_2, f([1, 1, 1]) = P_3$.

(d) Data la proiettività f del punto precedente, trovarne il luogo fisso.

(e) Scrivere l'equazione della retta r tra P_2 e P_3 . Determinare, se esistono, tutte le proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che hanno come luogo fisso r e P_0 .