Topologia -ESERCIZI 2

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Sia $X$ uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che
$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \overline{S}.$$
(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

2. Sia $X$ uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ vale che:
   (a) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$;
   (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
   (c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$;
   (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
   (e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
   (f) Fare un esempio in cui le inclusioni dei punti (2a), (2c), (2e) sono strette.

3. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Siano $E = (0, 1), F = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di $E$ ed $F$ e dell'insieme $\mathbb{N}$ con le seguenti topologie:
   (a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;
   (b) la topologia concreta $\mathcal{C}$;
   (c) la topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);
   (d) la topologa euclidea $\mathcal{T}_e$;
   (e) la topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;
   (f) la topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$;

4. ([Ser2] Cap. 1 Esempi 3.5 (3)) Sia $X$ uno spazio metrizzabile. Sia $d$ una metrica che induce la topologia. Dimostrare che per ogni $x \in X$, $r > 0$ vale che:
$$\overline{B^d_r(x)} \subseteq \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\};$$
$$Fr(B^d_r(x)) \subseteq \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$
Cercare degli esempi in cui le inclusioni possono essere strette.

5. Stabilire quali siano i sottoinsiemi densi di uno spazio con la topologia cofinita.

6. Sia $X$ un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $\mathcal{T}$ la seguente collezione di sottonisiemi:
$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

(a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $X$. È metrizzabile?

(b) Trovare la chiusura e la parte interna di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$.

(c) Descrivere tutte le funzioni continue da $(X, \mathcal{T})$ in uno spazio con due punti dotato della topologia discreta.

7. Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Sia $\mathcal{T}$ la topologia che ha questi insiemi come base (si veda il Foglio di Esercizi 1):

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

8. Si consideri la topologia su $\mathbb{R}$ (si veda Esercizi 1):

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

(a) Qual'è la chiusura di $(0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$? Qual'è la sua parte interna?

(b) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}$. Trovare la chiusura e la parte interna di $S$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

9. Sia $\mathcal{T}_+$ la topologia della semicontinuità superiore su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}_+ := \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Verificare che data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono equivalenti:

(a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq a\}$ è chiuso in $\mathcal{T}_e$.

(b) La funzione $f$ è continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$.

(c) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ vale che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ $f(x) \geq f(x_0) + \epsilon$.

(d) (solo se avete fatto il lim sup) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, vale che $\limsup_{x \to x_0} \geq f(x_0)$.

(e) Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione che converge ad $x_0$, vale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_n) \geq f(x_0) + \epsilon$ per ogni $n \geq N$.

Ricavare e dimostrare le affermazioni analoghe per la topologia della semicontinuità inferiore $\mathcal{T}_-$:

$$\mathcal{T}_- := \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

Dimostrare che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ e d è anche continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$. Tutti questi concetti si estendono a funzioni da $(X, d)$ spazio metrico ad $\mathbb{R}$.

10. Sia $f\colon (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.

(a) Dimostrare che se $f$ è costante allora $f$ è continua;

(b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora $f$ è continua;

(c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora $f$ è continua se e solo se è costante.

11. Sia $X$ un insieme non vuoto, siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ due topologie su $X$. Sia $f\colon X \to X$ l'applicazione identica ($f(x) = x$ per ogni $x \in X$). Dimostrare che:

    (a) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è continua se e solo se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$;

    (b) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è aperta se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;

    (c) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è chiusa se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;

    (d) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è un omeomorfismo se e solo se $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

12. Sia $X$ uno spazio topologico. Dimostrare le seguenti affermazioni:

    (a) Se $X$ ha la proporietà che ogni applicazione da $X$ a qualunque spazio topologico $Y$ è continua, allora $X$ è uno spazio discreto.

    (b) Se $X$ ha la proporietà che per ogni spazio topologico $Y$ ogni applicazione da $Y$ a $X$ è continua, allora $X$ è uno spazio con la topologia concerta.

13. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia $X$ uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, $Y$ un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $Y$

$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

    (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su $Y$.

    (b) Dimostrare che $f$ è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su $X$ e $f_*\mathcal{T}$ su $Y$.

    (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su $Y$ che rendono $f$ continua.

14. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

    (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

    (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

    (c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

15. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base per la topologia di $X$. Provare che $f$ è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$. Dimostrare (quindi esibire un controesempio) che l'analoga affermazione non vale per i chiusi: non è vero che se $f(X \setminus A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{B}$, allora $f$ è chiusa.

16. Dimostrare che se $f\colon X \longrightarrow Y$ è un'applicazione biiettiva tra spazi topologici, $f$ è aperta se e solo se è chiusa.

17. Fare un esempio di un'applicazione tra spazi topologici che sia:

    (a) aperta e chiusa ma non continua;

    (b) continua e aperta e non chiusa;

(c) continua e chiusa e non aperta.

18. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in $X$ (sugg: qui serve la "formula di proiezione" (Manetti Prop. 2.2): se in generale $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sono sottoinsiemi, vale che $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$). Dimostrare che se togliamo l'ipotesi che $f$ sia aperta l'implicazione non vale necessariamente.

19. Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.

    (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.

    (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da

    $$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

    è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.

    (c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

    (d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f\colon X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di $X$.

20. Manetti 3.47: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.

21. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè $f$ nè $g$ sono continue $g$ la loro composizione $g \circ f$ non è continua.

    (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.

    (c) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se $f$ non è continua e $g$ è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

22. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ la retta reale con la topologia cofinita (in cui gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti).

    (a) $f(x) = \sin(x)$ è una funzione continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

    (b) Le funzioni polinomiali sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

    (c) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$?

    (d) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

23. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ le funzioni definite ponendo

    $$f(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ x \text{ se } x < 1. \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x > 1 \\ x \text{ se } x \leq 1. \end{cases}$$

    Si discuta la continuità di $f$ e di $g$.