

## ESERCIZI 2

### Ancora sugli spazi euclidei

L. Stoppino, corso di Geometria 1  
Università di Pavia, a.a. 2020/21

1. Sia  $r \subset \mathbb{E}^2$  una retta nel piano euclideo standard. Sia  $P \in \mathbb{E}^2$  un punto. Definiamo la distanza di  $P$  da  $r$  come  $d(P, r) := \inf\{d(P, Q), Q \in r\}$ .

- (a) Verificare che l'estremo inferiore è un minimo e che il minimo è realizzato da  $\bar{Q} \in r$  così definito: data  $s$  la retta perpendicolare ad  $r$  passante da  $P$ ,  $\{\bar{Q}\} = s \cap r$ .
- (b) Verificare che  $d(P, r) = 0$  se e solo se  $P \in r$ .
- (c) Verificare la formula per la distanza: se  $r$  ha equazione cartesiana  $ax + by + c = 0$  e  $P$  ha coordinate  $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$  allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- (d) Scrivere e verificare le affermazioni analoghe e l'analogia formula nello spazio euclideo standard  $\mathbb{E}^n$  di dimensione  $n \geq 1$ , con  $P \in \mathbb{E}^n$  e un iperpiano  $\pi$  di equazione cartesiana  $\pi: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c = 0$ .

2. Dimostrare che dato uno spazio euclideo  $V$  ed un'applicazione  $T: V \rightarrow V$ , sono equivalenti:

- (1)  $T$  è un operatore unitario  
(cioè  $T$  è lineare e vale che per ogni  $v, w \in V$ ,  $\langle v, w \rangle = \langle T(v), T(w) \rangle$ ).
- (2) Vale che  $T(0_V) = 0_V$  e per ogni  $v, w \in V$  vale che  $\|v - w\| = \|T(v) - T(w)\|$ .

(sugg: la parte difficile è (2)  $\Rightarrow$  (1). Dimostrate prima che (2) implica che  $\forall v, w \in V$   $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ . Poi usate una base ortonormale di  $V$ . La soluzione è sul Sernesi Teorema 20.1)

3. Siano  $P, Q$  due punti distinti di uno spazio euclideo  $\mathbb{E}$ . Sia  $M$  il punto medio del segmento  $\overline{PQ}$ . Sia  $\mathbb{H}$  l'iperpiano perpendicolare a  $\overline{PQ}$  passante per  $M$ . Dimostrare che

$$\mathbb{H} = \{R \in \mathbb{E} \mid d(P, R) = d(Q, R)\},$$

cioè  $\mathbb{H}$  è formato da tutti e soli i punti equidistanti da  $P$  e da  $Q$ .

4. Sia  $f \in Isom(\mathbb{E})$  una isometria di uno spazio euclideo  $\mathbb{E}$ .

- (a) Dimostrare che se  $f$  fissa due punti distinti  $P, Q \in \mathbb{E}$ , allora  $f$  fissa tutta la retta  $L(P, Q)$ .
- (b) Generalizzare questa affermazione a un numero finito di punti.
- (c) Concludere che se  $f$  fissa  $n + 1$  punti affinemente indipendenti, allora  $f$  è l'identità.
5. Dimostrare che in uno spazio euclideo  $\mathbb{E}$ , dato un punto  $C \in \mathbb{E}$ , la simmetria rispetto a  $C$  è un'isometria. È diretta o inversa? (sugg: dipenderà dalla dimensione di  $\mathbb{E}$ ).
6. (Sernesi 1 esercizio 20-2) Determinare la riflessione in  $\mathbb{E}^2$  determinata dalla retta di equazione assegnata:
- (a)  $x = 0$ ;
- (b)  $x + y = 0$ ;
- (c)  $x - 2y = 0$ ;
- (d)  $2x - 3y = 0$ ;
- (e)  $x + y - 1 = 0$ .
7. In ciascuno dei casi seguenti, stabilire se esiste un'isometria  $f$  di  $\mathbb{E}^2$  che soddisfa le condizioni assegnate. In caso positivo, determinare esplicitamente tutte le possibili  $f$ .
- (a)  $f(0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 0) = (1, 2)$  ed  $f$  è un'isometria inversa.
- (b)  $f(0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 0) = (2, 1)$  ed  $f$  è un'isometria inversa.
- (c)  $f(0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 0) = (2, 1)$  ed  $f$  è un'isometria diretta.
- (d)  $f(0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 0) = (1, 3)$  ed  $f$  è un'isometria inversa.
- (e)  $f$  lascia fissa la retta  $x - 3y = 0$  e non è l'identità.
- (f)  $f$  lascia fissi i punti  $(2, 3)$  e  $(1, 0)$  e non è l'identità.
- (g)  $f$  lascia fisso  $(0, 0)$  e manda  $(2, 0)$  in  $(\sqrt{3}, 1)$ .
8. Sia  $F \subseteq \mathbb{E}$  un sottoinsieme di uno spazio euclideo. Definiamo
- $$Isom(F) := \{f \in Isom(\mathbb{E}) \mid f(F) = F\} \subseteq Isom(\mathbb{E}).$$
- (attenzione: le isometrie di questo sottoinsieme non lasciano necessariamente fissi i punti  $F$ , ma mandano  $F$  in sé).
- (a) Dimostrare che  $Isom(F)$  è un sottogruppo di  $Isom(\mathbb{E})$ .
- (b) Dimostrare che, dato  $O \in \mathbb{E}$  e  $r > 0$ , detta data  $S_O^r$  la sfera di centro  $O$  e raggio  $r$ , vale che  $Isom(S_O^r) = Isom_O(\mathbb{E})$ .
9. (Sernesi 20.4) In ciascuno dei casi seguenti dimostrare che esiste un'unica isometria  $f$  di  $\mathbb{E}^3$  che soddisfa le condizioni assegnate, e determinarle esplicitamente.

- (a)  $f$  fissa l'asse  $x$  e l'asse  $y$  ed è un'isometria diretta.
  - (b)  $f$  fissa l'asse  $y$  e l'asse  $z$  ed è un'isometria inversa.
10. Dimostrare che una isometria inversa  $f$  di un piano euclideo tale che  $f^2 = id_{\mathbb{E}}$  è necessariamente una riflessione. Vale la stessa affermazione in dimensione arbitraria?
11. Dimostrare che se  $f$  è un'isometria di uno spazio euclideo tale che  $P$  è un suo punto fisso, allora  $P$  è un punto fisso anche di  $f^n$  per qualunque  $n \in \mathbb{N}^{>0}$ . Se invece  $P$  è un punto fisso per un qualche  $f^n$  posso concludere che è un punto fisso per  $f$ ?