ESERCIZI 2
Ancora sugli spazi euclidei

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta nel piano euclideo standard. Sia $P \in \mathbb{E}^2$ un punto. Definiamo la distanza di P da r come $d(P, r) := \inf\{d(P, Q), Q \in r\}$.
   (a) Verificare che l'estremo inferiore è un minimo e che il minimo è realizzato da $\overline{Q} \in r$ così definito: data s la retta perpendicolare ad r passante da P, $\{\overline{Q}\} = s \cap r$.
   (b) Verificare che $d(P, r) = 0$ se e solo se $P \in r$.
   (c) Verificare la formula per la distanza: se r ha equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ e P ha coordinate $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ allora
   $$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
   (d) Scrivere e verificare le affermazioni analoghe e l'analoga formula nello spazio euclideo standard $\mathbb{E}^n$ di dimensione $n \geq 1$, con $P \in \mathbb{E}^n$ e un iperpiano π di equazione cartesiana $\pi\colon a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c = 0$.
2. Dimostrare che dato uno spazio euclideo V ed un'applicazione $T\colon V \to V$, sono equivalenti:
   (1) T è un operatore unitario
   (cioè T è lineare e vale che per ogni $v, w \in V$, $\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle$).
   (2) Vale che $T(0_V) = 0_V$ e per ogni $v, w \in V$ vale che $\|v - w\| = \|T(v) - T(w)\|$.

   (sugg: la parte difficile e (2) $\Rightarrow$ (1). Dimostrate prima che (2) implica che $\forall v, w \in V$ $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Poi usate una base ortonormale di V. La soluzione è sul Sernesi Teorema 20.1)
3. Sia $f \in \mathit{Isom}(\mathbb{E})$ una isometria di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$.
   (a) Dimostrare che se f fissa due punti distinti $P, Q \in \mathbb{E}$, allora f fissa tutta la retta $L(P, Q)$.
   (b) Generalizzare questa affermazione a un numero finito di punti.
   (c) Concludere che se f fissa $n + 1$ punti affinemente indipendenti, allora f è l'identità.
4. Dimostrare che in uno spazio euclideo $\mathbb{E}$, dato un punto $C \in \mathbb{E}$, la simmetria rispetto a C è un'isometria. È diretta o inversa? (sugg: dipenderà dalla dimensione di $\mathbb{E}$).

5. (Sernesi 1 esercizio 20-2) Deteminare la riflessione in $\mathbb{E}^2$ determinata dalla retta di equazione assegnata:
   (a) $x = 0$;
   (b) $x + y = 0$;
   (c) $x - 2y = 0$;
   (d) $2x - 3y = 0$;
   (e) $x + y - 1 = 0$.

6. In ciascuno dei casi seguenti, stabilire se esiste un'isometria f di $\mathbb{E}^2$ che soddisfa le condizioni assegnate. In caso positivo, determinare esplicitamente tutte le possibili f.
   (a) $f(0, 0) = (1, 1)$, $f(1, 0) = (1, 2)$ ed f è un'isometria inversa.
   (b) $f(0, 0) = (1, 1)$, $f(1, 0) = (2, 1)$ ed f è un'isometria inversa.
   (c) $f(0, 0) = (1, 1)$, $f(1, 0) = (2, 1)$ ed f è un'isometria diretta.
   (d) $f(0, 0) = (1, 1)$, $f(1, 0) = (1, 3)$ ed f è un'isometria inversa.
   (e) f lascia fissa la retta $x - 3y = 0$ e non è l'identità.
   (f) f lascia fissi i punti $(2, 3)$ e $(1, 0)$ e non è l'identità.
   (g) f lascia fisso $(0, 0)$ e manda $(2, 0)$ in $(\sqrt{3}, 1)$.

7. Sia $F \subseteq \mathbb{E}$ un sottoinsieme di uno spazio euclideo. Definiamo
$$Isom(F) := \{f \in Isom(\mathbb{E}) \mid f(F) = F\} \subseteq Isom(\mathbb{E}).$$
   (attenzione, le ismetrie di questo sottoinsieme non lasciano FISSO F, ma lo mandano in sè).
   (a) Dimostrare che $Isom(F)$ è un sottogruppo di $Isom(\mathbb{E})$.
   (b) Dimostrare che, dato $O \in \mathbb{E}$ e $r > 0$, detta data S^r_O la sfera di centro O e raggio r, vale che $Isom(S^r_O) = Isom_O(\mathbb{E})$.

8. (Sernesi1 20.4) In ciascuno dei casi seguenti dimostrare che esiste un'unica isometria f di $\mathbb{E}^3$ che soddisfa le condizioni assegnate, e determinarle esplicitamente.
   (a) f fissa l'asse x e l'asse y ed è un'isometria diretta.
   (b) f fissa l'asse y e l'asse z ed è un'isometria inversa.

9. Dimostrare che una isometria inversa f di un piano euclideo tale che $f^2 = id_{\mathbb{E}}$ è necessariamente una riflessione.

10. Dimostrare che se f è un'isometria di uno spazio euclideo tale che P è un suo punto fisso, allora P è un punto fisso anche di f^n per qualunque $n \in \mathbb{N}^{>0}$. Se invece P è un punto fisso per un qualche f^n posso concludere che è un punto fisso per f?