Topologia- ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1,
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$:
   (a) $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$;
   (b) $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\}$;
   (c) $C := \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$;
   (d) $D := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}$.

2. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^3$:
   (a) $A := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$;
   (b) $B := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$;
   (c) $C := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\}$;
   (d) $D := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \leq 0\}$.

3. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
   - $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
   - $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i\{|x_i - y_i|\}$;
   - $d''(\underline{x}, \underline{y}) := \min\{d_e(\underline{x}, \underline{y}), 1\}$.

   (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;
   (b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;
   (c) Stabilire se le metriche d e d' e d'' sono equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$.

4. Data una metrica d su un'insieme non vuoto X, si consideri l'applicazione $\overline{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ così definita:
$$\overline{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$
   (a) Dimostrare che $\overline{d}$ è una metrica su X;
   (b) dimostrare che d e $\overline{d}$ sono metriche topologicamente equivalenti (cioè inducono la stessa topologia);
   (c) si consideri il caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $d = d_e$. In questo caso d e $\overline{d}$ sono metriche equivalenti?

5. Dimostrare che un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alla metrica euclidea su dominio e codominio.

6. (Ser2, Cap1, Sez1) Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'applicazione $f\colon X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := d(x, x_0)$. Dimostrare che f è continua (con su $\mathbb{R}$ la metrica eulcidea).

7. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $x_0 \in X$ e sia $f\colon X \to Y$ un'allpicazione tale che esiste $M > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq M d_X(x, x_0)$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua in x_0.

8. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano d_1 e d_2 metriche su uno stesso insieme X. Dimostrare che l'identità $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ è un omeomorfismo se e solo se d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.

9. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, una sometria è un'applicazione $f\colon X \to Y$ tale che per ogni $x, x' \in X$ vale che $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$. Dimostrare che una isometria tra due spazi metrici àv e sempre continua.

10. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi metrici, con su X la metrica discreta. Dimostrare che, indipendentemente dalla metrica su Y, f è sempre continua.

11. Sia X l'insieme

$$X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X.$$

(a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d:

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$
$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$
$$C := \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}.$$

12. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle tra loro.

13. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

(a) In ogni spazio topologico i punti sono sottoinsiemi chiusi.
(b) Esistono spazi topologici in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
(c) Esistono spazi topologici metrizzabili in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
(d) Esistono spazi topologici in cui i punti sono sia chiusi sia aperti.

14. Stabilire quali delle seguenti famiglie sono topologie su $\mathbb{R}$ e quali no:
    (a) $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
    (b) $\mathcal{G} := \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
    (c) $\mathcal{G} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
    (d) $\mathcal{H} := \{(-c, b), c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$.

15. Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.

16. Dimostrare che uno spazio metrizzabile è di Hausdorff.

17. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.

18. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica eulcidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono una base per la topologia euclidea.
    (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;
    (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;
    (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

19. Si consideri la metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$. Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ sia

$$C_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(x, p) \leq r\}.$$

    (a) Dimostrare che $C_r(p)$ è la chiusura della palla di raggio r centrata in p.
    (b) Si dica se esiste una topologia su $\mathbb{R}^n$ per la quale la famiglia $\mathcal{C} := \{C_r(p), r > 0, p \in \mathbb{R}^n\}$ è una base.
    (c) Qual'è la topologia generata da $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^n$?

20. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

21. Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi
$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$
   (a) Dimostrare che gli U_n, al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X.
   (b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T2? I suoi punti sono chiusi?
   (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

22. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$
   (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
   (b) stabilire se $\mathcal{T}$ è confrontablile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$, e/o con la topologia cofinita su $\mathbb{R}$;
   (c) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ i punti sono chiusi? È una topologia T2?

23. Consideriamo l'insieme
$$S := \{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
   (a) Dimostrare che S è una base per una topologia, che chiamiamo topologia della retta di Sorgenfrey e indichiamo con il simbolo $\mathcal{T}_S$ (usare il lemma della base).
   (b) Dimostrare che per ogni $A \in S$ A è sia aperto sia chiuso in $\mathcal{T}_S$, ma che $\mathcal{T}_S$ non è la topologia discreta.
   (c) Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *non* è una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

24. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

25. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Chiamiamo un aperto $U \in \mathcal{T}$ *primo* se vale questa proprietà:
    Se $W, V \in \mathcal{T}$ sono tali che $W \cap V \subseteq U$, allora $W \subseteq U$ oppure $V \subseteq U$.
   (a) Fare un esempio di uno spazio topologico contenente (almeno) un aperto che non sia primo.
   (b) Se $x \in X$ è chiuso, allora l'aperto $X \setminus \{x\}$ è primo.
   (c) Se X ha la topologia discreta quali sono i suoi aperti primi? E se ha la topologia concreta? E se ha la la topologia cofinita?
   (d) Mostrare che se X è T2 gli aperti primi sono esattamente l'insieme $\{X, X \setminus \{x\}, x \in X\}$.

26. Quali delle topologie elencate nell'esercizio 12 sono di Hausdorff (T2)? Quali sono in generale le possibili topologie di Hausdorff su un insieme finito?