ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Stabilire per quali $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ i seguenti punti di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono affinemente indipendenti.
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Per $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$ scrivere l'equazione del sottospazio affine che essi generano, e trovarne la giacitura.

2. Si considerino le seguenti terne di punti in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
$$\left\{ P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 100 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \right\}.$$
$$\left\{ Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
$$\left\{ R_1 = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Stabilire se sono allineati o meno.
   (b) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(P_i) = Q_i$?
   (c) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(P_i) = R_i$?
   (d) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(Q_i) = R_i$?
   (e) Stesse domande per una isometria (considerando la struttura euclidea standard su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$).

3. Si considerino le seguenti terne di punti in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Stabilire se sono o meno allineati. In caso positivo trovare la dimensione e una rappresentazione cartesiana dello spazio affine che generano.

4. Stabilire se i seguenti tre piani dati tramite le loro equazioni cartesiane in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, appartengono o no a uno stesso fascio (proprio o improprio).

   (a) $x - y + z = 0$, $-2x + 4y - 6z + 2 = 0$, $y - 2z + 1 = 0$;

   (b) $2x - 3y + 3 = 0$, $x - y + 6 = 0$, $x - 3z - 1 = 0$;

   (c) $x - 4y = 0$, $2x - 8y + 2 = 0$, $2x + z = 0$;

   (d) $x - y + 2z = 5$, $2x - 2y + 4z = 8$, $-x + y - 2z = 0$.

5. Dimostrare che il gruppo di omotetie di centro fissato O in uno spazio affine su un campo K (si veda la definzione nella Sezione 14 del Sernesi, Geometria 1) è isomorfo al gruppo moltiplicativo K^*.

6. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con spazio vettoriale associato V su un campo K. Sia fissato un punto $O \in \mathbb{A}$; identifichiamo $\mathbb{A}$ con V mediate la corrsipondenza $P \mapsto \overrightarrow{OP}$. Una combinazione lineare $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ di vettori v_i di V, con i coefficienti $a_i \in K$ si dice combinazione baricentrica se $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

   (a) Verificare che un sottoinsieme di V corrisponde ad un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ se e solo se è chiuso per combinazioni baricentriche.

   (b) Verificare che un'applicazione f da $\mathbb{A}$ in sè stesso è una affinità se e solo se rispetta le combinazioni baricentriche, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni n-upla di vettori $v_1, \ldots, v_n$, per ogni n-upla di $a_i \in K$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $f(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_if(v_1) + \ldots + a_nf(v_n)$.

7. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo K.

   (a) Dimostrare che se K possiede almeno $n + 1$ elementi, allora $\mathbb{A}$ non può essere unione di di n sottospazi affini propri (sugg. usare un'induzione sulla dimensione dello spazio e/o sul numero di sottospazi affini).

   (b) Dedurre dal punto precedente che uno spazio affine su un campo infinito (come sono $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$), non può essere unione finita di suoi sottospazi affini propri.

8. Si considerino i seguenti punti dello spazio affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Esiste una affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$? È unica? Si scriva esplicitamente f.

9. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione n. Fissiamo un sistema di riferimento affine. Sia C il punto di coordinate affini $(c_1, \ldots, c_n)$. Sia $\sigma_p \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la simmetria rispetto a C, definita così: per ogni $P \in \mathbb{A}$, $\sigma_C(P)$ è il punto tale che

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{C\sigma_C(P)}.$$

   (a) Dimostrare che in coordinate $\sigma_C(x_1, \ldots, x_n) = (2c_1 - x_1, \ldots, 2c_n - x_n)$.

   (b) Dimostrare che la composizione $\sigma_C \circ \sigma_D$ di due simmetrie di centri rispettivamente C e D rispetto ad un punto è una traslazione di vettore $2\overrightarrow{DC}$.

10. Discutere le seguenti affermazioni. In uno spazio affine $\mathbb{A}$.

   (a) Le triplette di punti distinti allineati sono fra loro tutte affinemente equivalenti.

   (b) Gli insiemi formati da 4 punti distinti complanari sono tutti fra loro affinemente equivalenti.

11. In uno spazio affine di dimensione 3 sia Π_1, Π_2, Π_3 una terna di piani tali che l'intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ è un unico punto p. Dimostrare che per ongi altra terna di piani $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tali che $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ è un solo punto, esiste $f \in Aff(\mathbb{A})$ tale che $f(\Pi_i) = \Sigma_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

12. (a) Dimostrare che per sottoinsiemi di $\mathbb{A}$, spazio affine reale, la convessità è una proprietà affine.

   (b) Dimostrare che per sottoinsiemi di $\mathbb{E}$, spazio euclideo la convessità è una proprietà euclidea.

   (c) Fare un esempio di due sottoinsiemi di uno spazio affine reale che sono entrambi convessi ma non sono affinemente equivalenti.

   (d) Stesse domande usando il concetto di stellato in uno spazio affine reale e in uno spazio euclideo.

   (e) Esistono proprietà euclidee che non sono affini?

   (f) Esistono proprietà affini che non sono euclidee?

13. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con la sua naturale struttura affine e la naturale struttura euclidea indotta dal prodotto scalare standard. Si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Esiste un'affinità f tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$? Se sì, scriverla esplicitamente in coordinate.

(b) Esiste un'isometria f tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots 4$?

(c) Esiste un'isometria f tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2$? Se e sì, scriverla esplicitamente in coordinate.

14. Fare un esempio di sue sottoinsiemi convessi di uno spazio euclideo che non siano congruenti.

15. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo bidimensionale. Siano $s, r \subset \mathbb{E}$ due rette incidenti in un punto $P = s \cap r$. Siano ρ_r e ρ_s le riflessioni rispetto alle due rette. Dimostrare che $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro P e di angolo 2θ dove θ è l'angolo formato da r ed s.

16. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo bidimensionale. Mostrare che la composizione di due rotazioni di $\mathbb{E}$ è o una rotazione oppure una traslazione.