

ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1,
Università di Pavia, a.a. 2018/19

1. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su \mathbb{R}^2 :

- (a) $A := \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$;
- (b) $B := \{(x_1, x_2) \mid x_1x_2 \neq 0\}$;
- (c) $C := \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0\}$;
- (d) $D := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}$.

2. Stabilire quali di questi insiemi sono aperti rispetto alla metrica euclidea su \mathbb{R}^3 :

- (a) $A := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$;
- (b) $B := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\}$;
- (c) $C := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\}$;
- (d) $D := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \leq 0\}$.

3. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i \{|x_i - y_i|\}$;
- $d''(\underline{x}, \underline{y}) := \min\{d_e(\underline{x}, \underline{y}), 1\}$.

- (a) Dimostrare che sono delle metriche su \mathbb{R}^n ;
- (b) Disegnare le bolle aperte in \mathbb{R}^2 ;
- (c) Stabilire se le metriche d e d' e d'' sono equivalenti alla metrica euclidea d_e su \mathbb{R}^n .

4. Data una metrica d su un'insieme non vuoto X , si consideri l'applicazione $\bar{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

- (a) Dimostrare che \bar{d} è una metrica su X ;
- (b) dimostrare che d e \bar{d} sono metriche topologicamente equivalenti (cioè inducono la stessa topologia);
- (c) si consideri il caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $d = d_e$. In questo caso d e \bar{d} sono metriche equivalenti?

5. Dimostrare che un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alla metrica euclidea su dominio e codominio.
6. (Ser2, Cap1, Sez1) Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'applicazione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := d(x, x_0)$. Dimostrare che f è continua (con su \mathbb{R} la metrica euclidea).
7. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia $x_0 \in X$ e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tale che esiste $M > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq M d_X(x, x_0)$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua in x_0 .
8. (Ser2, Cap1, Sez1) Siano d_1 e d_2 metriche su uno stesso insieme X . Dimostrare che l'identità $id_X: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ è un omeomorfismo se e solo se d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.
9. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione tra spazi metrici, con su X la metrica discreta. Dimostrare che, indipendentemente dalla metrica su Y , f è sempre continua.
10. Sia X l'insieme

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

- (a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X .
- (b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d :

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$

$$C := \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}.$$

11. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle tra loro.
12. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
 - (a) In ogni spazio topologico i punti sono sottoinsiemi chiusi.
 - (b) Esistono spazi topologici in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
 - (c) Esistono spazi topologici metrizzabili in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.

(d) Esistono spazi topologici in cui i punti sono sia chiusi sia aperti.

13. Stabilire quali delle seguenti famiglie sono topologie su \mathbb{R} e quali no:

- (a) $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (b) $\mathcal{G} := \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- (c) $\mathcal{G} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (d) $\mathcal{H} := \{(-c, b), c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\emptyset\}$.

14. Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.

15. Dimostrare che uno spazio metrizzabile è di Hausdorff.

16. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.

17. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica euclidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono una base per la topologia euclidea.

- (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;
- (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;
- (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

18. Si consideri la metrica euclidea d_e su \mathbb{R}^n . Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ sia

$$C_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(x, p) \leq r\}.$$

- (a) Dimostrare che $C_r(p)$ è la chiusura della palla di raggio r centrata in p .
- (b) Si dica se esiste una topologia su \mathbb{R}^n per la quale la famiglia $\mathcal{C} := \{C_r(p), r > 0, p \in \mathbb{R}^n\}$ è una base.
- (c) Qual'è la topologia generata da \mathcal{C} su \mathbb{R}^n ?

19. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

20. Sia $X = \{2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

- (a) Dimostrare che gli U_n , al variare di n in X formano una base per una topologia \mathcal{T} su X .

- (b) Lo spazio topologico (X, \mathcal{T}) è T2? I suoi punti sono chiusi?
- (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in (X, \mathcal{T}) .

21. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R} :

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

- (a) Si dimostri che \mathcal{T} è una topologia su \mathbb{R} ;
- (b) stabilire se \mathcal{T} è confrontabile con la topologia euclidea \mathcal{T}_e , e/o con la topologia cofinita su \mathbb{R} ;
- (c) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ i punti sono chiusi? È una topologia T2?

22. Consideriamo l'insieme

$$S := \{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

- (a) Dimostrare che S è una base per una topologia, che chiamiamo topologia della retta di Sorgenfrey e indichiamo con il simbolo \mathcal{T}_S (usare il lemma della base).
- (b) Dimostrare che per ogni $A \in S$ A è sia aperto sia chiuso in \mathcal{T}_S , ma che \mathcal{T}_S non è la topologia discreta.
- (c) Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *non* è una base per la topologia di Sorgenfrey su \mathbb{R} .

23. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

24. Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico. Chiamiamo un aperto $U \in \mathcal{T}$ *primo* se vale questa proprietà:
Se $W, V \in \mathcal{T}$ sono tali che $W \cap V \subseteq U$, allora $W \subseteq U$ oppure $V \subseteq U$.

- (a) Fare un esempio di uno spazio topologico contenente (almeno) un aperto che non sia primo.
- (b) Se $x \in X$ è chiuso, allora l'aperto $X \setminus \{x\}$ è primo.
- (c) Se X ha la topologia discreta quali sono i suoi aperti primi? E se ha la topologia concreta? E se ha la topologia cofinita?
- (d) Mostrare che se X è T2 gli aperti primi sono esattamente l'insieme $\{X, X \setminus \{x\}, x \in X\}$.

25. Quali delle topologie elencate nell'esercizio 11 sono di Hausdorff (T2)? Quali sono in generale le possibili topologie di Hausdorff su un insieme finito?