Topologia-ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20
Soluzioni svolte da Enea Riva

3 Sia $X = \mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_1 = \mathcal{K}$ la topologia cofinita. Stabilire se $(X, \mathcal{K})$ è connesso. È connesso per archi?

(soluzione)

(connessione) Ricordiamo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice *connesso* se

$$\nexists (A, B) \text{ con } A, B \in \mathcal{T} \text{ non vuoti t.c. } A \cap B = \emptyset \text{ e } A \cup B = X$$

Supponiamo per assurdo esista una coppia $A, B \in \mathcal{K}$ t.c. $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$. In generale preso un qualsiasi $B \in \mathcal{K}$, non vuoto, per definizione di topologia cofinita si avrà:

$$B = \mathbb{R} \setminus \{p_1, ..., p_k\} \quad \text{con } p_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, ..., k.$$

Quindi necessariamente $p_i \in A$ mentre la condizione $A \cap B = \emptyset$ implicherebbe che $A = \{p_1, ..., p_k\}$ ovvero $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$ sarebbe unione di due insiemi finiti e quindi finito, assurdo.

(arco connesso) Ricordiamo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice *connesso per archi* se

$$\forall p, q \in X \quad \exists\, \phi : [0, 1] \to X \text{ continua t.c. } \phi(0) = p \text{ e } \phi(1) = q.$$

Ora, dati $p, q \in \mathbb{R}$ con $p < q$ consideriamo l'applicazione:

$$\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$\psi(t) = p + t(q - p)$$

la quale banalmente soddisfa $\psi(0) = p$ $\psi(1) = q$. Verifichiamo che sia continua; detto $B \in \mathcal{K}$ avremo:

$$\psi^{-1}(B) = \psi^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{p_1, ..., p_k\}) = \psi^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{p_1, ..., p_k\} \cap [p, q]) = [0, 1]\setminus\psi^{-1}(\{p_{i_1}, ..., p_{i_m}\})$$

dove p_{i_j} $j = 1, .., m$ è il sottoinsieme di $\{p_1, .., p_k\}$ t.c. $p_{i_j} \in [p, q]$. Ora notiamo che $\psi^{-1}(B) \subseteq [0, 1]$ è aperto, difatti il suo complementare:

$$[0, 1] \setminus \psi^{-1}(B) = \{p_{i_1}, ..., p_{i_k}\}$$

essendo unione finita di punti è chiuso in $[0, 1]$ (il quale è dotato della topologia indotta da quella euclidea standard di $\mathbb{R}$). Quindi ψ è continua, da cui concludiamo che $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso per archi.

9 (Kosniowski 9.8 (e)) Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in $\mathbb{Z}$ è costante. Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in uno spazio discreto è costante.

(*soluzione*) Supponiamo che X sia connesso, sia $f : X \to \mathbb{Z}$ funzione continua. Supponiamo per assurdo che essa sia non costante, allora esisteranno:

$$p, q \in f(X) \quad p \neq q.$$

Osserviamo come su $\mathbb{Z}$ la topologia indotta da quella euclidea standard di $\mathbb{R}$, coincida con quella discreta. Difatti per ogni $p \in \mathbb{Z}$ basta considerare ad esempio una bolla aperta $B(p, 1/2)$ di $\mathbb{R}$, la quale ovviamente non contiene altri elementi di $\mathbb{Z}$ al di fuori di p; quindi il singoletto $\{p\}$ è aperto di $\mathbb{Z}$.
Allora sia $\{p\}$ che $f(X) \setminus \{p\}$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{Z}$, inoltre:

$$X = f^{-1}(\mathbb{Z}) = f^{-1}(\{p\} \cup f(X) \setminus \{p\}) = f^{-1}(\{p\}) \cup f^{-1}(f(X) \setminus \{p\}) =: A_1 \cup A_2$$

ma per la continuità di f, A_1 e A_2 sono aperti, disgiunti e ricoprono X, ovvero X è sconnesso, assurdo.

Viceversa supponiamo per assurdo che esista una funzione $g : X \to \mathbb{Z}$ continua e non costante. Allora detto $n \in g(X)$ si ha che:

$$X = f^{-1}(\mathbb{Z}) = g^{-1}(\{n\} \cup g(X) \setminus \{n\}) = g^{-1}(\{n\}) \cup g^{-1}(g(X) \setminus \{n\})$$

ed essendo g continua e $\mathbb{Z}$ dotato di topologia discreta, $g^{-1}(\{n\}), g^{-1}(g(X) \setminus \{n\})$ sono due aperti disgiunti non vuoti (in quanto, essendo g non costante, $g(X)$ contiene almeno due elementi distinti) che ricoprono X, quindi X è sconnesso, assurdo.

Abbiamo già osservato come $\mathbb{Z}$ sia dotato di topologia discreta e come oltre a questa caratteristica non abbiamo utilizzato altra proprietà di $\mathbb{Z}$, quindi mutati mutandis le nostre considerazioni si applicano tout court ad un qualsiasi spazio topologico discreto.

12 Sia X uno spazio connesso tale che esiste una applicazione continua non costante $f \colon X \to \mathbb{R}$. Mostrare che X ha cardinalità infinita non numerabile. Mostrare che se X è uno spazio connesso metrico con almeno due punti, X ha cardinalità infinita non numerabile.

(*soluzione*) Supponiamo per assurdo che X abbia cardinalità al più numerabile. L'immagine $f(X)$, di X sarà composta da al più un sottoinsieme numerabile di elementi di $\mathbb{R}$, ma sicuramente non meno di due dato che f non è costante. Quindi dato che $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo, esisterà almeno un elemento $q \notin f(X)$, tale che:

$$p < q < p' \quad p, p' \in f(X)$$

Ora preso l'aperto

$$\mathbb{R} \setminus \{q\} =: A_1 \cup A_2 \quad \text{con } A_1 = (-\infty, q) \text{ e } A_2 = (q, +\infty)$$

Si vede come:

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$$

ma essendo f continua, $f^{-1}(A_1)$ e $f^{-1}(A_2)$ rappresentano una coppia di aperti disgiunti di X che lo ricoprono, ovvero X non è connesso, assurdo.

Dato che X è spazio metrico (con metrica d), fissato un punto $p \in X$ possiamo definire la funzione:

$$\begin{aligned} &f : X \to \mathbb{R} \\ &f(x) := d(x, p) \end{aligned}$$

tale funzione è ovviamente non costante in quanto per le proprietà di una metrica:

$$f(p) = d(p, p) = 0 \quad \text{mentre} \quad f(q) = d(q, p) \neq 0 \quad \text{se } q \neq p$$

Inoltre f è continua difatti da:

$$|f(q) - f(q')| = |d(q, p) - d(q', p)| \leq d(q, q')$$

(che discende dalla disuguaglianza triangolare), segue che

$$|f(q) - f(q')| < \epsilon \quad \text{è sicuramente soddsifatta se } d(q, q') < \epsilon$$

ovvero f è continua. Il risultato segue da quanto mostrato sopra.

13 Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in X sono aperte e viceversa.

(soluzione) Supponiamo che ogni punto $p \in X$ possieda un intorno connesso, ovvero:

$$\forall p \in X \quad \exists C_p \text{ connesso, t.c.} p \in A_p \subseteq C_p \quad \text{con } A_p \text{ aperto}$$

Ora sia D una componente connessa di X, allora avremo che:

$$D \supseteq C_p \quad \forall p \in D.$$

Difatti essendo C_p connesso contenente p per massimalità delle componenti connesse, sarà sottoinsieme di D. Ma allora:

$$D = \bigcup_{p \in D} C_p = \bigcup_{p \in D} A_p$$

ovvero D coincide con la sua parte interna, ovvero è aperto.

Viceversa sapendo che le componenti connesse costituiscono una partizione di X, avremo che ogni $p \in X$ apparterrà a una componente connessa, la quale essendo sia aperta che connessa costituisce un intorno connesso di p.

21 Quali sono le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea? Esiste una topologia diversa su $\mathbb{Q}$ con le stesse componenti?

(soluzione) Le componente connesse di $\mathbb{Q}$ sono date dai singoletti $\{q\} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$. Difatti ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ che contiene almeno 2 elementi è disconesso. Sia $U \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$p, q \in U \quad p \neq q, \quad p, q \in \mathbb{Q}$$

Ricordiamo che per ogni coppia di numeri razionali p, q esisterà un $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che:

$$p < k < q$$

e quindi $U \cap \mathbb{Q} = (A_1 \cup A_2) \cap \mathbb{Q}$ con

$$A_1 := \{p \in U \text{ t.c. } p < k\} \quad A_2 := \{p \in U \text{ t.c. } p > k\}$$

aperti, è necessariamente sconnesso.

Una topologia differente da quella euclidea che abbia le stesse componenti connesse è data da esempio dalla topologia discreta. Difatti per essa ogni sottoinsieme di due o più elementi (S) si può scrivere come:

$$S = \{p\} \cup (S \setminus \{p\})$$

dove $\{p\}$ e $S \setminus \{p\}$ sono aperti; e quindi S è sconnesso.