Topologia - ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20
Soluzioni svolte da Enea Riva

3 Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{3}\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.

(*soluzione*) Indichiamo con $I := \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{3}\}$ il nostro sottoinsieme ($I \subseteq \mathbb{R}$ con topologia indotta da quella euclidea standard di $\mathbb{R}$).
Ora dato che $\sqrt{3}$ è irrazionale possiamo scrivere:

$$I = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

e dato che $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ è un sottoinsieme chiuso (e limitato) di $\mathbb{R}$ segue che anche I è chiuso (e limitato).
Consideriamo la seguente collezione di aperti:

$$\{A_n\}_{n\geq 1} \qquad A_n := \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{3}, c_n)$$

dove $\{c_n\}_{n\geq 1}$ è una successione di numeri razionali tali che:

$$c_n > -\sqrt{3} \;\; \forall n \geq 1 \qquad c_n \leq c_{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{3}$$

ovvero una successione di razionali che approssima per difetto $\sqrt{3}$ (per la definizione di numero reale esiste sempre una tale successione).
Verifichiamo che tale collezione sia un ricoprimento aperto, difatti si vede come:

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = I,$$

mentre presa una qualsiasi sotto-collezione finita $\{A_{i_k}\}_{k\in K}$ (K insieme finito di indici) si avrà:

$$\bigcup_{k\in K} A_{i_k} = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{3}, \hat{c}),$$

dove $\hat{c} := \max_{k\in K}\{c_{i_k}\} < \sqrt{3}$. Ora dato che la sotto-successione è finita esisterà un c_n con n abbastanza grande t.c.

$$\hat{c} < c_n < \sqrt{3}$$

e quindi la sotto-collezione non costituisce un ricoprimento di I, quindi I non è compatto.

6 Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ e per ogni $p \in S^n$, S^n non è omeomorfo a $S^n \setminus \{p\}$.

(*soluzione*) Ci basterà osservare come S^n sia compatto , mentre $S^n \setminus \{p\}$ non lo è. Infatti essendo la compattezza una proprietà topologica (ovvero due spazi omeomorfi fra loro devono avere la stessa proprietà), avremo di conseguenza che non esiste alcun omeomorfismo fra di essi.

S^n Possiamo definire S^n come:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad t.c \quad |x|^2 = 1\}$$

dove con $|x|$ si intende la norma euclidea del vettore x. Da questa definizione si vede subito come S^n sia limitato, inoltre è chiuso, in quanto controimmagine di un chiuso:

$$S^n = f^{-1}(\{1\})$$

dove $f(x) := |x|^2$ è continua.

$S^n \setminus \{p\}$ A meno di effettuare una rotazione in R^{n+1} (la quale è ovviamente omeomorfismo), possiamo porre $p \in S^n$ di coordinate $p = (1, 0..., 0)$. Ora ricordiamo che fra $S^n \setminus \{p\}$ e $\mathbb{R}^n$ esiste un omeomorfismo, detto *proiezione stereografica*, definito come:

$$\pi : S^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$$
$$\pi(x_1, ..., x_{n+1}) = (\frac{x_2}{1-x_1}, ..., \frac{x_{n+1}}{1-x_1})$$

il quale è continuo, invertibile, e con inversa:

$$\pi^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{p\}$$
$$\pi^{-1}(y_2, ..., y_{n+1}) = (\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}, \frac{2y_2}{|y|^2+1}, ..., \frac{2y_{n+1}}{|y|^2+1})$$

continua. Quindi π induce un omeomorfismo fra $S^n \setminus \{p\}$ e $\mathbb{R}^n$. Infine essendo $\mathbb{R}^n$ illimitato segue che non è compatto, come pure $S^n \setminus \{p\}$ che ne è omeomorfo.

7 Dimostrare che uno spazio con la topologia discreta è compatto se e solo se è finito.

(soluzione) Supponiamo che lo spazio X sia compatto. Allora il ricoprimento aperto $\{\{p\}\}_{p \in X}$ avrà un sotto-ricoprimento finito. Ma ciò è possibile unicamente se X è finito.
Viceversa se X è finito allora anche $\mathcal{P}(X)$ è finito, ed essendo ogni ricoprimento aperto una collezione di elementi di $\mathcal{P}(X)$, sono tutti necessariamente finiti.

15 Sia X uno spazio metrico. Siano $C, D \subseteq X$ chiusi non vuoti. Poniamo

$$d(C, D) := \inf\{d(x, y), x \in C, y \in D\}.$$

Dimostrare che se C oppure D sono compatti, allora $d(C, D) \neq 0$ se e solo se $C \cap D = \emptyset$. Fare un esempio in cui $d(C, D) = 0$ ma $C \cap D = \emptyset$.

(soluzione) Supponiamo che D sia compatto, e che $\delta = d(C, D) \neq 0$;
Allora per ogni $y \in D$ la bolla $B(y, \delta/2)$ sarà tale che:

$$B(y, \delta/2) \cap C = \emptyset \qquad \forall y \in C,$$

quindi l'aperto:

$$A := \bigcup_{y \in D} B(y, \delta/2)$$

soddisfa:

$$D \subseteq A \quad A \cap C = \emptyset$$

e quindi a fortiori $D \cap C = \emptyset$. Notiamo inoltre come questa implicazione sia vera anche senza supporre la compattezza di D.

Viceversa posto $C \cap D = \emptyset$, supponiamo per assurdo che $d(C, D) = 0$.
Per la definizione di inf per ogni $\epsilon > 0$ piccolo a piacere possiamo determinare una coppia (x, y) con $x \in C$ e $y \in D$ tale che $d(x, y) < \epsilon$.
Quindi possiamo creare una successione $\{(x_i, y_i)\}_{i \geq 1}$ tale che:

$$d(x_i, y_i) < \frac{1}{2^i}$$

ma dato che C è compatto (in uno spazio metrico) è anche sequenzialmente compatto, ovvero ogni successione $\{c_i\}_{i \geq 1}$ ($c_i \in C$) contiene una sotto-successione $\{c_{i_k}\}_{k \geq 1}$ convergente.
Quindi se consideriamo la successione $\{x_i\}_{i \geq 1}$ avrà una sotto-successione $\{x_{i_k}\}_{k \geq 1}$ convergente, in particolare essendo C chiuso convergerà ad un punto $x \in C$.
Quindi avremo:

$$\lim_{k \to \infty} d(x_{i_k}, y_{i_k}) = d(x, \lim_{k \to \infty} y_{i_k}) = 0$$

ovvero

$$\lim_{k \to \infty} y_{i_k} = x$$

quindi anche la sotto-successione $\{y_{i_k}\}_{k \geq 1}$ converge, e converge a $x \in C$.
Ma essendo D chiuso, per ogni sotto-successione convergente in D, anche il suo limite sarà in D, quindi $x = \lim_{k \to \infty} y_{i_k} \in D$, ovvero $D \cap C \neq \emptyset$, assurdo.