Topologia-ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20
Soluzioni svolte da Enea Riva

10 Sia X l'insieme:

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{f è continua rispetto alla metrica euclidea}\}$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione:

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

(a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono aperti e/o chiusi (possono essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d:

$$A := \{f \in X | f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X | f(0) = 1\};$$

$$C := \{f \in X | f(0) \in \mathbb{Q}\}.$$

soluzione (a) Verifichiamo le tre proprietà di una metrica:

(Non-negatività) essendo $|f(x) - g(x)| \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ si ha $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \geq 0$, inoltre

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow f = g$$

(simmetria)

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| = d(g,f)$$

(Disuguaglianza triangolare)

$$\begin{aligned}
d(f,g) + d(g,h) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)| \\
&\geq \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\} \\
&\geq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| = d(f,h)
\end{aligned}$$

(b) a tal riguardo citiamo il seguente lemma:

Lemma 1 *Sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni $f_n(x) \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_n = \psi$ rispetto alla metrica d definita sopra. Allora $\forall x \in [0,1]$ si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \psi(x)$$

rispetto alla metrica euclidea standard di $\mathbb{R}$.

Inoltre ricordiamo come un sottoinsieme C di uno spazio metrico X è chiuso se e solo se per ogni $\{p_n\}_{n\geq 1}$ successione di elementi $p_n \in C$ che converge in X a $p := \lim_{n\to\infty} p_n$, si ha $p \in C$.
Con tali strumenti controlliamo i sottoinsiemi:

(A) Consideriamo il complementare $(X \setminus A)$ di A, ovvero:

$$X \setminus A = \{f \in X \mid f(0) \leq 1\}$$

Prendiamo una sequenza $\{f_n\}_{n\geq 1}$ di elementi di $X \setminus A$, che converga a un elemento $f \in X$. Per il lemma avremo che $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$ ma $\forall n \geq 1 \quad f_n(0) \leq 1$ quindi anche $f(0) = \lim_n f_n(0) \leq 1$, ovvero $X \setminus A$ è chiuso, e quindi A è aperto. Viceversa A non è chiuso, difatti presa la sequenza $\{g_n\}_{n\geq 1}$ definita come:

$$g_n(x) = 1 - 1/n \quad \forall x \in [0,1]$$

notiamo come $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ sia pari a :

$$g(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

e quindi non appartiene ad A.

(B) Come sopra consideriamo una successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ di elementi di $X \setminus B$, che converga a un elemento $f \in X$. Ma per il lemma $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Quindi B è chiuso. B non è aperto, difatti presa la successione in $X \setminus B$, $\{g_n\}_{n\geq 1}$ della forma:

$$g_n(x) = 1 + 1/n \quad \forall x \in [0,1]$$

notiamo come $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ sia pari a :

$$g(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

e quindi non appartiene ad $X \setminus B$. Quindi $X \setminus B$ non è chiuso, di conseguenza B non è aperto.

(C) Presa la successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ di funzioni $g_n \in C$ definita come:

$$g_n(x) = (1 + 1/n)^n \quad \forall x \in [0,1],$$

si verifica come essa converga ed il suo limite $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ sia:

$$g(x) = e \;\; \text{Numero di Eulero} \quad \forall x \in [0,1]$$

ma essendo e un numero notoriamente irrazionale, si ha che $g \notin C$, ovvero C non è chiuso. Viceversa preso il complementare di C, $X \setminus C$:

$$X \setminus C := \{f \in X \mid f(0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

e la successione $\{h_k\}_{k \geq 1}$ in $X \setminus C$ come:

$$h_k(x) := 1 + e/n \quad \forall x \in [0,1]$$

si vede come essa converga a $H := \lim_{n \to \infty} h_n$ con:

$$H(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

ovvero $X \setminus C$ non è chiuso, e quindi C non è aperto.

14 Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalià finita.

soluzione ($\Leftarrow$) Supponiamo che X abbia cardinalità finita. Allora ogni singoletto $\{x\}$ con $x \in X$ avrà complementare $X \setminus \{x\} \subseteq X$ finito, essendo sottoinsieme di insieme finito. Quindi nella topologia cofinita i singoletti sono aperti, ovvero la topologia cofinita non è meno fine della topologia discreta (ovvero $\mathcal{T}_{cof} \supseteq \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{discreta}$). Ma la topologia discreta è la topologia più fine che esista su qualsiasi insieme (ovvero $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{discreta}$ $\forall \mathcal{T}$ topologia su X), quindi coincidono.

($\Rightarrow$) Dato che la topologia cofinita e quella discreta coincidono, allora ogni singoletto $\{x\}$ con $x \in X$ è un aperto. Ma dato che $\{x\} \in \mathcal{T}_{cof}$ allora $X \setminus \{x\}$ è finito, e quindi anche $X = \{x\} \cup X \setminus \{x\}$ è finito.

16 Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito, è la topologia discreta.

soluzione Notiamo come la topologia discreta sia sempre metrizzabile tramite la metrica:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Detta *metrica discreta*.
Ora sia $D = D(x,y)$ una metrica che induce una topologia su X spazio finito di cardinalità $|X| = n$.
Fissiamo un $x \in X$, ed definiamo $R_x := \{r_i = D(x, y_i) \ \ y_i \in X \setminus \{x\}\}$. Essendo R_x finito esso avrà un elemento mimino (non nullo) $R := \min R_x$. Allora dato che ogni bolla metrica $B(x,r)$ centrata in x e di raggio $r > 0$ è aperto per la topologia indotta da D. Preso un $r < R$ allora si ha:

$$B(x,r) = \{x\}$$

ovvero il singoletto $\{x\}$ è aperto per la topologia indotta. Quindi dato che ogni singoletto è aperto per la topologia essa coinciderà con quella discreta.

20 Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri naturali maggiori a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X| \ \ m \text{ divide } n\}.$$

(a) Dimostrare che gli U_n al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ di X.

(b) Lo spazio topologico $(\mathcal{T}, X)$ è T2? I suoi punti sono chiusi?

(c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

soluzione (a) Per il lemma della base ci basta osservare che:

$$\bigcup_{n \in X} U_n = X \qquad U_n \cap U_{n'} = \bigcup_{k \in I} U_k \ \text{ con } I \text{ finito}$$

Per la prima, osserviamo come ogni n divide se stesso quindi $n \in U_n \ \forall n \in X$. Per il secondo notiamo che se m divide sia n che n' allora dividerà anche il loro massimo comun divisore (che indichiamo come $\mathrm{mcd}(n, n')$), ovvero:

$$U_n \cap U_{n'} \subseteq U_{\mathrm{mcd}(n,n')}$$

e viceversa se m divide $\mathrm{mcd}(n, n')$ a fortiori dividerà sia n che n', cioè

$$U_n \cap U_{n'} \supseteq U_{\mathrm{mcd}(n,n')}$$

e quindi:

$$U_n \cap U_{n'} = U_{\mathrm{mcd}(n,n')}.$$

Notiamo come se n, n' sono coprimi fra loro allora $\mathrm{mcd}(n, n') = 1$ e quindi non ci sarà nessun $m \in X$ che li divida entrambi; quindi in tal caso:

$$U_n \cap U_{n'} = \emptyset$$

(b) $(X, \mathcal{T})$ non è T2; Difatti prendiamo una coppia di numeri multipli fra loro come n e kn. Si osservi come ogni aperto della base U_m che contiene kn, allora conterrà anche n in quanto:

se n divide kn e kn divide m allora n divide m

Dato che ogni aperto è unione di elementi della base segue, che ogni aperto che contiene kn conterrà necessariamente anche n.
I punti non sono chiusi, difatto se lo fossero, preso n allora il suo complementare $X \setminus \{n\}$ sarebbe aperto. In particolare $X \setminus \{n\}$ contiene i multipli kn di n, ma ogni aperto che contiene kn conterrà anche n per $k \neq 1$, quindi abbiamo un assurdo.

(c) Notiamo che fissato un $n \in X$:

$$n \in U_m \Leftrightarrow \quad m = kn \ \text{ con } k = 1, 2, ...$$

Quindi un elemento della base U_p non contiene n se e solo se n non divide p (in simboli $n \nmid p$).

Per definizione $\overline{\{n\}}$ è il complementare di $X \setminus \overset{\circ}{\{n\}}$ (parte interna di $X \setminus \{n\}$) che è il più grande aperto che non contiene $\{n\}$, quindi:

$$X \setminus \overset{\circ}{\{n\}} = \bigcup_{n \notin U_k} U_k$$

ma da quanto osservato sopra:

$$n \notin U_k \quad \Leftrightarrow \quad n \nmid k$$

Quindi:

$$X \setminus \overset{\circ}{\{n\}} = \bigcup_{n \nmid k} U_k$$

In particolare:

$$X \setminus \overset{\circ}{\{n\}} \supseteq \{k \mid n \nmid k\}$$

D'altra parte preso un k tale che $n|k$, allora $n \in U_k$; quindi:

$$X \setminus \overset{\circ}{\{n\}} = \{k \text{ t.c. } n \nmid k\}$$

ovvero:

$$\overline{\{n\}} = \{k \text{ t.c. } n|k\}$$

Ad esempio abbiamo:

$$\overline{\{2\}} = \{2\} \quad \overline{\{3\}} = \{3\} \quad \overline{\{p\}} = \{p\} \text{ se } p \text{ è primo}$$
$$\overline{\{4\}} = \{2,4\} \quad \overline{\{6\}} = \{2,3,6\}$$

22 Consideriamo l'insieme:

$$S := \{[a,b) \ \ a < b, a, b, \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

(a) Dimostrare che S è una base per una topologia, che chiamiamo topologia della retta di Sorgenfrey e indichiamo con il simbolo $\mathcal{T}_S$(usare il lemma della base).

(b) Dimostrare che per ogni $A \in S$ A è sia aperto che chiuso in $\mathcal{T}_S$, ma che $\mathcal{T}_S$ non è la topologia discreta.

(c) Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a,b), a < b, a, b, \in \mathbb{Q}\}$ non è una base per la topologia di Sorgenfrey sulla retta $\mathbb{R}$.

soluzione (a) è ovvio che:

$$\bigcup_{a,b \ a<b} [a,b) = \mathbb{R}$$

mentre intersecando abbiamo i seguenti casi:

$$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} \text{se } a \le b \le c \le d & [a,b) \cap [c,d) = \emptyset \\ \text{se } a \le c \le b \le d & [a,b) \cap [c,d) = [c,b) \\ \text{se } c \le a \le b \le d & [a,b) \cap [c,d) = [a,b) \\ \text{se } c \le a \le d \le b & [a,b) \cap [c,d) = [a,d) \\ \text{se } c \le d \le a \le b & [a,b) \cap [c,d) = \emptyset \end{cases}$$

che sono elementi della collezione, quando non vuoti.

(b) $[a, b)$ è aperto ovviamente essendo un elemento della base. Per far vedere che è anche chiuso consideriamo il suo complementare:

$$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

e vediamo come:

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} [-n + a, a) \qquad [b, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [b, b + n)$$

Quindi essendo entrambi aperti, tutto l'insieme è aperto, e quindi $[a, b)$ è chiuso.
Basta mostrare che esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che non è aperto per $\mathcal{T}_S$. Si consideri il sottoinsieme:

$$(-\infty, a]$$

se fosse aperto, esisterebbe un elemento della base $[c, d)$ tale che $a \in [c, d) \quad e \quad [c, d) \subseteq (-\infty, a]$, il che è assurdo.

(c) Se, per assurdo, lo fosse allora per definizione di base $\forall A \in \mathcal{T}_S$:

$$A = \bigcup_{k \in I} [q_k, s_k) \qquad \text{con } q_k, s_k \in \mathbb{Q}$$

Ora preso $A = [a, b)$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}$, dovrebbe esistere un $[q, s)$ con $q, s \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$a \in [q, s) \subseteq [a, b)$$

ma allora necessariamente si avrebbe $a = q$, il che è assurdo.