ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20
Soluzioni svolte da Enea Riva

1 Stabilire per quali $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ i seguenti punti di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono affinemente indipendenti.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$ scrivere l'equazione del sottospazio affine che essi generano, e trovarne la giacitura.

soluzione Indichiamo con

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per verificare quando questi 3 punti sono affinamente indipendenti ci basta vedere quando i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3} \in V = \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che in generale

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

Dunque si ha che:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ c-1 \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} a-1 \\ b-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Controllo la dipendenza lineare. Data una combinazione lineare di $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ c-1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a-1 \\ b-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Mi chiedo se necessariamente ho $k_1 = k_2 = 0$. Le equazioni precedenti sono il seguente sistema:

$$\begin{cases} k_2(a-1) = 0 \\ -k_1 + k_2(b-1) = 0 \\ k_1(c-1) = 0 \end{cases}$$

Poniamo $a \neq 1$, allora necessariamente $k_2 = 0$ e $k_1 = 0$.
Consideriamo ora il caso $a = 1$:

$$\begin{cases} k_2(b-1) - k_1 = 0 \\ k_1(c-1) = 0 \end{cases}$$

il quale ha soluzioni $(k_1, k_2) \neq (0,0)$ se e solo se

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 & b-1 \\ c-1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -(b-1)(c-1) = 0$$

ovvero se $b = 1 \vee c = 1$.
In conclusione per avere indipendenza lineare bisogna porre:

$$a \neq 1 \quad \vee (c \neq 1 \quad e \quad b \neq 1).$$

Fissiamo ora $a = 1, b = 2, c = 2$; in questo caso i vettori saranno:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

- Equazioni parametriche del sottospazio affine:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

- Equazioni parametriche della giacitura:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

- Equazioni Cartesiane della giacitura:

$$x_1 = 0$$

- Equazioni Cartesiane del sottospazio affine:

$$x_1 = 1$$

3 Si considerino le seguenti terne di punti in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

$$\left\{ P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 100 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left\{ Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left\{ R_1 = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Stabilire se sono allineati o meno.

(b) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(P_i) = Q_i$?

(c) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(P_i) = R_i$?

(d) Esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che che per ogni $i = 1, 2, 3$ $f(Q_i) = R_i$?

(e) Stesse domande per una isometria (considerando la struttura euclidea standard su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$).

soluzione (a) Consideriamo le coppie di vettori:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Questi due vettori sono linearmente dipendenti, quindi i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati nello spazio affine.

Consideriamo ora:

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{Q_1Q_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti, quindi i punti Q_1, Q_2, Q_3 non sono allineati nello spazio affine.

Siano ora:

$$\overrightarrow{R_1R_2} = \begin{pmatrix} -11/4 \\ -11/4 \end{pmatrix} \quad e \quad \overrightarrow{R_1R_3} = \begin{pmatrix} 17/10 \\ 17/10 \end{pmatrix}.$$

Questi due vettori sono linearmente dipendenti, quindi i punti R_1, R_2, R_3 sono allineati nello spazio affine.

(b) Dato che $\dim(\overline{P_1P_2P_3}) = 1 \neq 2 = \dim(\overline{Q_1Q_2Q_3})$, allora non esiste alcuna affinità f tale che $f(P_i) = Q_i$ con $i = 1, 2, 3$. Difatti, se esistesse, allora ci sarebbe un isomorfismo di spazi vettoriali $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\psi(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{Q_1Q_2} \quad e \quad \psi(\overrightarrow{P_1P_3}) = \overrightarrow{Q_1Q_3}$$

ma essendo P_1, P_2, P_3 allineati abbiamo che $\overrightarrow{P_1P_2} = k\overrightarrow{P_1P_3}$ con $k \neq 0$. Quindi si ha:

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \psi(\overrightarrow{P_1P_2}) = \psi(k\overrightarrow{P_1P_3}) = k\psi(\overrightarrow{P_1P_3}) = k\overrightarrow{Q_1Q_3}$$

Ovvero Q_1, Q_2, Q_3 dovrebbero essere allineati, il che è assurdo.

(c) Supponiamo che esista un affinità che manda $P_i \mapsto R_i$ $(i = 1, 2, 3)$; allora esisterebbe un isomorfismo di spazi vettoriali $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/4 \\ -11/4 \end{pmatrix} \quad e \quad \phi \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/10 \\ 17/10 \end{pmatrix}$$

ma poichè $\begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} \frac{\pi/4-1}{99} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/4 - 1 \end{pmatrix}$ e ϕ è lineare, si avrebbe che:

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \pi/4 - 1 \end{pmatrix} \right) = \phi \left(\frac{\pi/4 - 1}{99} \begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} \right) = \frac{\pi/4 - 1}{99} \phi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 99 \end{pmatrix} \right) = \frac{\pi/4 - 1}{99} \begin{pmatrix} 17/10 \\ 17/10 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\begin{pmatrix} -11/4 \\ -11/4 \end{pmatrix} = \frac{\pi/4 - 1}{99} \begin{pmatrix} 17/10 \\ 17/10 \end{pmatrix}$$

che è assurdo.

(d) coma al punto (b), essendo $\dim(\overline{R_1 R_2 R_3}) = 1 \neq 2 = \dim(\overline{Q_1 Q_2 Q_3})$, allora non esiste alcuna affinità f tale che $f(Q_i) = R_i \;\; i = 1, 2, 3$.

(e) essendo le isometrie sottogruppo delle affinità, non ci sono isometrie tali che $f(P_i) = Q_i \;\; i = 1, 2, 3$ e simili.

6 Dimostrare che il gruppo di omotetie di centro fissato O in uno spazio affine su un campo K (si veda la definizione nella Sezione 14 del Sernesi, Geometria 1) è isomorfo al gruppo moltiplicativo K^*.

soluzione Fissiamo un sistema di riferimento $O, e_1, ..., e_n$ di $\mathbb{A}^3$. Indichiamo con $\mathcal{O}_\lambda$ $(\lambda \in K^*)$ l'omotetia di rapporto λ, che nel sistema di riferimento fissato assume la forma:

$$\mathcal{O}_\lambda(x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Fissiamo la mappa $\psi : \mathcal{O}_\lambda \mapsto \lambda \in K^*$ e verifichiamo che è omomorfismo di gruppi. Di fatti

$$\psi(\mathcal{O}_\lambda \circ \mathcal{O}_\lambda) = \psi(\mathcal{O}_{\lambda\lambda'}) = \lambda\lambda' = \psi(\mathcal{O}_\lambda)\psi(\mathcal{O}_{\lambda'})$$

Ora, osserviamo che ψ è invertibile per costruzione, e essendo omomorfismo invertibile è automaticamente isomorfismo. Per completezza verifichiamo esplicitamente che anche ψ^{-1} è omomorfismo:

$$\phi := \psi^{-1} : \lambda \mapsto \mathcal{O}_\lambda$$
$$\phi(\lambda\lambda') = \mathcal{O}_{\lambda\lambda'} = \mathcal{O}_\lambda \mathcal{O}_{\lambda'} = \phi(\lambda)\phi(\lambda')$$

e quindi anche ϕ è omomorfismo.

7 Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con spazio vettoriale associato V su un campo K. Sia fissato un punto $O \in \mathbb{A}$; identifichiamo $\mathbb{A}$ con V mediate la corrispondenza $P \mapsto \overrightarrow{OP}$. Una combinazione lineare $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ di vettori v_i di V, con i coefficienti $a_i \in K$ si dice combinazione baricentrica se $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

(a) Verificare che un sottoinsieme di V è un sottospazio affine se e solo se è chiuso per combinazioni baricentriche.

(b) Verificare che un'applicazione (invertibile) f da $\mathbb{A}$ in sè stesso è una affinità se e solo se rispetta le combinazioni baricentriche, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni n-upla di vettori $v_1, \ldots, v_n$, per ogni n-upla di $a_i \in K$ tali che $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $f(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_if(v_1) + \ldots + a_nf(v_n)$.

soluzione (a) $S \subseteq V$ è sottospazio affine $\Leftrightarrow$ S è chiuso per combinazioni baricentriche.

($\Rightarrow$) fissiamo un $\omega \in S$; sia Σ sottospazio vettoriale di V associato ad S.
Detta $e_1, .., e_k$ una base di Σ allora possiamo scrivere ogni elemento $v \in S$ come:

$$v = \omega + \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \qquad c_1, ..., c_k \in K.$$

Presi ora $v_i, ..., v_m \in S$ effettuiamo una combinazione baricentrica di questi vettori:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\omega + \sum_{i=1}^{k} c_i^{(j)} e_i) = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_j)\omega + \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{m} c_i^{(j)} \alpha_j) e_i = \omega + \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \in S$$

dove si è posto $\beta_i = \sum_{j=1}^{m} c_i^{(j)} \alpha_j$, e si è usato che $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

($\Leftarrow$) sia $S \neq \varnothing$ un sottoinsieme chiuso per combinazione baricentrica e fissiamo un $\omega \in S$.
Per dimostrare che S è sottospazio affine, basta verificare che il sottoinsieme $\Sigma \subseteq V$ dato dagli elementi della forma $v - \omega \ \ \forall v \in S$ ùn sottospazio vettoriale.
Controlliamo la chiusura rispetto al prodotto scalare-vettore.
Se $v - \omega \in \Sigma$ con $v \in \Sigma$, verifichiamo che anche $\alpha(v - \omega) \in \Sigma$. Per ciò basta che sia:

$$\alpha(v - \omega) + \omega \in S$$

ma:

$$\alpha(v - \omega) + \omega = \alpha v + \omega(1 - \alpha)$$

che è combinazione baricentrica di v, ω.
Controlliamo la chiusura rispetto alla somma di vettori.
Presi $v - \omega, v' - \omega \in \Sigma$, vogliamo mostrare che

$$(v - \omega) + (v' - \omega) + \omega \in S$$

ma

$$(v - \omega) + (v' - \omega) + \omega = v + v' - \omega,$$

che è combinazione baricentrica di v, v', ω.

(b) $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è affinità $\Leftrightarrow$ preserva le combinazioni baricentriche.

(⇒) Sia $f : V \to V$ affinità (dove abbiamo sfruttato l'identificazione $\mathbb{A} = V$). Allora fissato $p \in V$, data la struttura di spazio vettoriale, l'isomorfismo fra spazi vettoriali associati $\hat{f} : V \to V$ sarà:

$$\hat{f}(\overrightarrow{pq}) = \hat{f}(q - p) := f(q) - f(p)$$

Consideriamo ora l'espressione $f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) - f(p)$ con $q_1, ..., q_k \in V$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Abbiamo che:

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) - f(p) = \hat{f}(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i - p) = \hat{f}(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p) = \hat{f(\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i q_i))} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(q_i) - f(p).$$

e quindi

$$f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(q_i).$$

(⇐) Come sopra, a partire dalla mappa $f : V \to V$, definiamo la mappa $\hat{f} : V \to V$ (con V spazio vettoriale associato allo spazio affine V) come $\hat{f}((p - q)) = f(p) - f(q)$ con q fissato. Allora f è affinità ⇔ $\hat{f}$ è applicazione lineare invertibile fra i corrispondenti spazi vettoriali. Verifichiamo la linearità di $\hat{f}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha(p - q)) &= f(\alpha(p - q) + q) - f(q) \\
&= f(\alpha p + q(1 - \alpha)) - f(q) \quad \text{essendo } \alpha p + (1 - \alpha)q \text{ combinazione baricentrica si ha} \\
&= \alpha f(p) + (1 - \alpha) f(q) - f(q) \\
&= \alpha(f(p) - f(q)) \\
&= \alpha \hat{f}(p - q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}((p - q) + (p' - q)) &= f((p - q) + (p' - q) + q) - f(q) \\
&= f(p + p' - q) - f(q) \quad \text{essendo } p + p' - q \text{ combinazione baricentrica si ha} \\
&= f(p) + f(p') - f(q) - f(q) \\
&= (f(p) - f(q)) + (f(p') - f(q)) \\
&= \hat{f}(p - q) + \hat{f}(p' - q)
\end{aligned}$$

10 Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione n. Fissiamo un sistema di riferimento affine. Sia C un punto, di coordinate affini $(c_1, \ldots, c_n)$. Sia $\sigma_p \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la simmetria rispetto a C, definita così: per ogni $P \in \mathbb{A}$, $\sigma_C(P)$ è il punto tale che

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{C\sigma_C(P)}.$$

(a) Dimostrare che in coordinate $\sigma_C(x_1, \ldots, x_n) = (2c_1 - x_1, \ldots, 2c_n - x_n)$.

(b) Dimostrare che la composizione $\sigma_C \circ \sigma_D$ di due simmetrie di centri rispettivamente C e D rispetto ad un punto è una traslazione di vettore $2\overrightarrow{DC}$.

soluzione (a) Consideriamo i punti $P = (x_1, ..., x_n)$, $C = (c_1, .., c_n)$ e $\sigma_C(P) = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$. Per definizione si ha:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{C\sigma_C(P)} \tag{1}$$

ma $\overrightarrow{PC} = (c_1 - x_1, ..., c_n - x_n)$ e $\overrightarrow{C\sigma_C(P)} = (\sigma_1 - c_1, ..., \sigma_n - c_n)$. Da cui, per (1):

$$c_i - x_i = \sigma_i - c_i \qquad \forall i = 1, ..., n$$

esplicitando σ_i abbiamo:

$$\sigma_i = 2c_i - x_i \qquad \forall i = 1, ..., n$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma_C \circ \sigma_D(x_1, ..., x_n) &= \sigma_C(2d_1 - x_1, ..., 2d_n - x_n)\\ &= (x_1 + 2(c_1 - d_1), ..., x_n + 2(c_n - d_n))\\ &= (x_1, ..., x_n) + 2(c_1 - d_1, ..., c_n - d_n)\end{aligned}$$

da cui segue che, si ha

$$\sigma_C \circ \sigma_D(P) = P + 2\overrightarrow{DC}$$

che è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{DC}$.