Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta telematica del 23 settembre 2020
Giustificare sempre le risposte.

1. [*15 punti*] Si considerino in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_0 = [0,0,1,0], P_1 = [1,0,1,2], P_2 = [0,1,1,1], P_3 = [1,1,1,1], P_4 = [-1,0,1,2].$$

   (a) Stabilire se P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.

   (b) Si consideri la carta affine $\mathcal{U}_2 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \mid x_2 \neq 0\}$, e si stabilisca se P_0, P_1, P_2, P_3 sono o meno affinemente indipendenti in $\mathcal{U}_2$. Stessa domanda per P_0, P_1, P_2, P_3, P_4.

   (c) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

   (d) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, e si calcolino le coordinate di P_4 rispetto a questo riferimento.

   (e) Esiste una proiettività diversa dall'identità che fissa P_1, P_2, P_3, P_4? In caso positivo esibirla.

2. Sia $\mathcal{T}$ la topologia su $\mathbb{R}$ nella quale gli insiemi aperti sono $\mathbb{R}$, $\emptyset$ e gli intervalli della forma $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia, e stabilire se è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$.

   (b) La topologia $\mathcal{T}$ è metrizzabile?

   (c) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto.

   (d) Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti e/o chiusi in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, e determinarne la parte interna e la chiusura.

$$E = \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad F = [0, +\infty), \quad G = \{0\}$$

   (e) Stabilire se le funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \leq 0 \\ x+1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$ da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ in sè sono continue.