

# Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

**Prova scritta telematica del 22 gennaio 2021**

Giustificare sempre le risposte.

1. [15 punti] Si considerino in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  i punti

$$P_0 = [1, 1, 1], P_1 = [1, 2, 0], P_2 = [1, 0, 2], P_3 = [2, 2, 1].$$

- (a) Stabilire se  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sono in posizione generale. Si calcoli la dimensione del sottospazio  $L$  generato da  $P_0, P_1, P_2$  e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.
- (b) Esiste una proiettività di  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  che manda  $[1, 0, 0]$  in  $P_1$ ,  $[0, 1, 0]$  in  $P_2$ , e  $[0, 0, 1]$  in  $P_3$  e tiene fisso  $[1, 1, 1]$ ?
- (c) Esibire, se esistono, tutte le proiettività che mandano  $[1, 0, 0]$  in  $P_1$ ,  $[0, 1, 0]$  in  $P_2$ , e  $[0, 0, 1]$  in  $P_3$ .
- (d) Trovare, se esistono, i punti di intersezione tra il sottospazio  $L(P_0, P_1)$  e il supporto della conica di equazione

$$\mathcal{C}: x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

2. [15 punti] Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi dell'insieme  $X = \{a, b, c\}$ .

$$\mathcal{T} := \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

- (a) Verificare che è una topologia su  $X$ . È T2 (di Hausdorff)? È T4?
- (b) Lo spazio  $(X, \mathcal{T})$  è connesso? È connesso per archi?
- (c) Esiste un sottospazio di  $X$  cardinalità maggiore di 1 con la topologia discreta? E con la concreta?
- (d) Esiste un'applicazione suriettiva e continua tra  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$  e  $(X, \mathcal{T})$ ? In caso positivo, esibirla.