Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 16 giugno 2021
Giustificare sempre le risposte.

1. Si consideri la seguente conica affine reale in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\mathcal{C}\colon 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10 = 0.$$

   (a) La si classifichi dal punto di vista affine (scrivendo l'equazione canonica). Se è a centro trovare le coordinate del centro.

   (b) La si classifichi dal punto di vista euclideo, esplicitando il cambio di coordinate cartesiane che la porta in forma canonica.

   (c) Identifichiamo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con la carta affine $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$. La si classifichi dal punto di vista proiettivo (scrivendo l'equazione canonica). Abbiamo aggiunto punti all'infinito? Se sì, quali?.

   (d) Si consideri ora la topologia euclidea su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, e la topologia indotta dalla euclidea su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si discutano le seguenti affermazioni:

      i. *supp* $\mathcal{C}$ è un sottospazio compatto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

      ii. *supp* $\overline{\mathcal{C}}$ è un sottospazio compatto di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

2. Si consideri l'insieme $X = \{a, b, c, d\}$ e la seguente topologia su X:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}.$$

   (a) Stabilire se le seguenti famiglie sono una base per $\mathcal{T}$.

      i. $\{\{a\}, \{c, d\}\}$

      ii. $\{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$

   (b) Trovare parte interna e chiusura di $\{a\}$ e di $\{b\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

   (c) Lo spazio $(X, \mathcal{T})$ è T0? È T4? (si diano le definizioni di T0 e di T4).

   (d) Esiste $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ iniettiva e continua?

   (e) Si discutano la seguenti affermazioni:

      i. Ogni topologia su X strettamente meno fine di $\mathcal{T}$ rende X connesso.

      ii. Ogni topologia su X più fine di $\mathcal{T}$ rende X sconnesso.