Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta telematica del 12 luglio 2021
Giustificare sempre le risposte.

1. *[15 punti]* Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti

$$P_0 = [1, 0, 1],\ P_1 = [1, 1, 1],\ P_2 = [1, -2, 0],\ P_3 = [0, 1, 1].$$

   (a) Stabilire se P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale. Si stabilisca la dimensione del sottospazio $L(P_0, P_1)$ e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

   (b) Esibire, se esistono, tutte le proiettività che mandano $[1, 0, 0]$ in P_1, $[0, 1, 0]$ in P_2, e $[0, 0, 1]$ in P_3.

   (c) Esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che ha come luogo fisso $\mathrm{Fix}(f) = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$? In caso positivo esibirla.

   (d) Sia $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la carta affine relativa a x_0. Scrivere l'equazione cartesiana di

$$L(P_0, P_1) \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_0 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

   come sottospazio affine di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

2. *[17 punti]* Sia $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Si considerino le seguenti famiglie di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{X\} \cup \{\mathcal{V} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{V}\};$$

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{V} \subseteq X \mid 0 \notin \mathcal{V}\} \cup \{\mathcal{V} \subseteq X \mid (-1, 1) \subseteq \mathcal{V}\}.$$

   (a) Verificare che sono delle topologie su X. Confrontarle tra loro e con la topologia euclidea su X.

   (b) Trovare parte interna e chiusura di $S := [-1/4, 1]$.

   (c) Stabilire se $(X, \mathcal{S})$ è T0 e/o T2.

   (d) Sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ l'applicazione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   Stabilire se f è continua da $(X, \mathcal{S})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. È possibile rendere f continua modificando il valore che assume in 0?

   (e) Lo spazio $(X, \mathcal{S})$ è compatto? È connesso?