$\mathcal{C}: 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10 = 0$

a) Classifichiamola dal punto di vista affine

Matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 10 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -10(-9-16) = = -250 \neq 0$$

è una conica non-degenere

sottomatrice associata alla parte di grado 2 omogenea

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det A' = -9-16 = -25 < 0$$

è una iperbole non degenere.

Equazione canonica affine $\boxed{x^2 - y^2 = 1}$

Centro: basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - 3y = 0 \end{cases}$$

che è non singolare omogeneo: $\boxed{C = (0,0)}$

b) Classifichiamola dal pdv euclideo: diagonalizziamo la matrice A'. Ecco il polinomio caratteristico:

$$P_{A'}(t) = |A' - tI_2| = \begin{vmatrix} 3-t & -4 \\ -4 & -3-t \end{vmatrix} = (3-t)(-3-t) - 16 =$$

$$= t^2 - 9 - 16 = t^2 - 25 = (t-5)(t+5)$$

Autovalori di $A' = \{\pm 5\}$

$$V_5 = \ker(A' - 5I_2) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \{x + 2y = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-5} = V_5^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

[perché A' è simmetrica]

Se consideriamo $M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in O(2)$

vale che

$$M^T A M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Cambio di coordinate che porta $\mathcal{C}$ in forma canonica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

infatti con questo cambio ho

$$\mathcal{C} : 5x'^2 - 5y'^2 + 10 = 0$$

ATTENZIONE: la diagonalizzazione in algebra lineare serve APPOSTA per non fare tanti conti. NON dovete verificare a mano che la „parte di grado 2 funziona così"!

Forma canonica euclidea

$$\boxed{\frac{x'^2}{2} - \frac{y'}{2} = 1}$$

2) $\boxed{\overline{\mathcal{C}} : 3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 10x_0^2 = 0}$

è la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ rispetto a x_0.

La matrice associata è sempre A quindi $\overline{\mathcal{C}}$ è una conica non degenere a punti reali.

(ad esempio $\mathrm{supp}\,\mathcal{C} \subseteq \mathrm{supp}\,\overline{\mathcal{C}}$)

l'equazione canonica proiettiva è:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Punti all'infinito. Sappiamo che per un'iperbole sono due. Calcoliamoli. Basta mettere a sistema

$$\begin{cases} 10x_0^2 + 3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$3t^2 - 8t - 3$ ha soluzioni $t_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$t = \frac{x_1}{x_2}$$

ottengo quindi

$$\boxed{\begin{matrix} [0, 3, 1] \\ [0, -\frac{1}{3}, 1] = [0, -1, 3] \end{matrix}}$$

come punti all'infinito.

d) Supp $\mathcal{C}$ è illimitato in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ con d_e quindi per Heine - Borel non è compatto.
(Tra l'altro supp $\mathcal{C}$ è chiuso in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$)

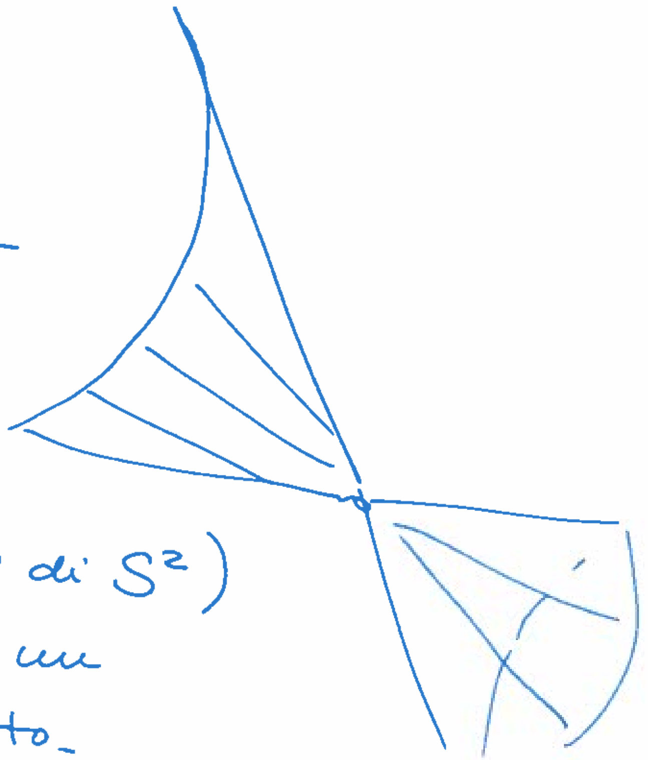
supp $\overline{\mathcal{C}}$ è un chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Infatti supp $\overline{\mathcal{C}}$ è il luogo di annullamento di un polinomio omogeneo.
Chiamando $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la quoziente, ho che

$\pi^{-1}(\text{supp}(\overline{\mathcal{C}}))$ è il luogo di annullamento dello stesso polinomio omogeneo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$
$\Rightarrow$ è un chiuso in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$

È immediato verificare che $\pi^{-1}(\text{supp}(\overline{\mathcal{C}}))$ è un chiuso saturo.
Quindi

$\pi(\pi^{-1}(\text{supp}(\overline{\mathcal{C}}))) = \text{supp}\,\overline{\mathcal{C}}$
è chiuso.



Ora, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è compatto
(abbiamo visto che è quoziente di S^2)
quindi supp $\overline{\mathcal{C}}$ è chiuso in un compatto $\Longrightarrow$ è compatto.

2) $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$

a) una base è una sotto-famiglia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che ogni aperto di τ è unione di elementi di τ

$\rightarrow$ se prendo $\{\{a\}, \{c,d\}\}$

$\{a,b\}$ non è unione di elementi in questa famiglia

$\Rightarrow$ non è una base.

$\rightarrow$ se prendo $\{\{a\}\ \{a,b\}, \{c\}\}$ $\{c\} \notin \tau \Rightarrow$ non è una base!

b) $\mathring{\{a\}} = \bigcup\{A, A \subseteq \{a\}, A \in \tau\} = \{a\}$ ($\{a\}$ è aperto)

$\overline{\{a\}} = \bigcap\{C, C \supseteq \{a\}, C \text{ chiuso in } \tau\} = \{a,b\}$

Chiusi per τ = $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \quad , \quad , \{a,b\}, \{b\}\}$

$\mathring{\{b\}} = \emptyset$

$\overline{\{b\}} = b$ ($\{b\}$ è chiuso)

(c) (X,τ) è T_0? T_0: $\forall x,y \in X$ con $x \neq y$

? $\exists \mathcal{U} \in \tau$ tc $x \in \mathcal{U} \wedge y \notin \mathcal{U}$

oppure $\exists \mathcal{V} \in \tau$ tc $x \notin \mathcal{V} \wedge y \in \mathcal{V}$

se considero $x = c$ $y = d$

ogni aperto di τ che contiene c contiene anche d

$\Rightarrow (X,\tau)$ non è T_0.

(X,τ) è T_4? $\forall C, D$ chiusi disgiunti

? $\exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tc $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ e $C \subseteq \mathcal{U}$ e $D \subseteq \mathcal{V}$

Chiusi disgiunti di (X,τ) sono: $X, \emptyset$ che sono anche aperti

$\{a,b\}, \{c,d\}$ che sono anche aperti, oppure

$\{b\}$ e $\{c,d\}$ che vanno bene con $\mathcal{U}=\{a,b\}$ $\mathcal{V}=\{c,d\}$

$\Rightarrow$ (X,τ) è T4.

d) $(X,\tau) \xrightarrow[f]{} (\mathbb{R},\tau_e)$ $\exists f$ iniettiva e continua? No

Se tale f esistesse avrei $f(X) = 4$ punti

$f(X)=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ $\quad \tau_e|_{f(X)} = \mathcal{D}_{f(X)}$

allora avrei:

$$(X,\tau) \xrightarrow{\varphi} (f(X),\mathcal{D}_{f(X)})$$

$\varphi = f$ ristretta all'immagine
iniettiva continua
suriettiva e anche aperta ovviamente.

$\Rightarrow$ φ omeomorfismo, ma $\tau \neq \mathcal{D}_X$ assurdo. (A) ultima pagina

e) Osserviamo preliminarmente che (X,τ) è sconnesso:
$\{a,b\}$ e $\{c,d\}$ sono aperti e chiusi propri per τ.

$\longrightarrow$ Ogni topologia su X strettamente meno fine di τ rende X connesso. No $\mathcal{S}=\{X,\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\}$ è topologia su X, è strettamente meno fine di τ e $(X,\mathcal{S})$ è sconnesso. L'affermazione è falsa.

$\longrightarrow$ Ogni topologia più fine di τ rende X sconnesso. Vero: se $\mathcal{S}$ è topologia tale che $\tau \subseteq \mathcal{S}$ (cioè $\mathcal{S}$ è più fine di τ), in particolare $\{a,b\}$ e $\{c,d\}$ sono aperti e chiusi propri per $\mathcal{S}$. L'affermazione è vera

(*) Dimostrazione alternativa che $\nexists\ f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\tau_e)$ iniettiva e continua:

Supponiamo che tale f esista

$$f(a)=x_1$$
$$f(b)=x_2$$
$$f(c)=x_3$$
$$f(d)=x_4$$

Siccome $(\mathbb{R},\tau_e)$ è uno spazio metrico, i suoi punti sono chiusi (è T1).

f continua implica che

$f^{-1}(x_1)=\{a\}$ sia chiuso

$f^{-1}(x_2)=\{b\}$ sia chiuso...

eccetera.

Ma già questa affermazione è <u>impossibile</u>