Soluzioni scritto Geo 1 13 febbraio 2020

(1)

(a) Un sottospazio aperto e chiuso in uno spazio topologico è necessariamente connesso. *[3 punti]*

Falso: basta prendere uno spazio qualunque non connesso (ad esempio $(X, \mathcal{D})$ con $|X|>1$ e $\mathcal{D}$ topologia discreta). X stesso è aperto e chiuso in X ma non è connesso.

(b) Un sottospazio connesso in uno spazio topologico X è necessariamente aperto e chiuso in X. *[3 punti]*

Falso: Prendiamo ad esempio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ e $p = 1 \in \mathbb{R}$. $\{1\}$ è connesso (essendo il singoletto) in $\mathbb{R}$ ma non è aperto (è chiuso invece ovviamente).

(c) Un sottospazio non vuoto aperto e chiuso in uno spazio topologico X contiene necessariamente una componente connessa di X. *[3 punti]*

vero: Sia $A \subseteq X$ spazio topologico, tale che $A \neq \emptyset$, A aperto e chiuso. Poiché $A \neq \emptyset$ $\exists x \in A$. Sia $C(x)$ la componente connessa di X che contiene x. $C(x) := \bigcup_{\substack{C \text{ connesso in } X \\ C \ni x}} C$. $C(x)$ è in particolare connesso.

Considero $A \cap C(x)$: è sia aperto sia chiuso in $C(x)$ e inoltre è non vuoto perché contiene x.

Allora, essendo $C(x)$ connesso, $A \cap C(x) = C(x)$, ovvero $C(x) \subseteq A$.

In effetti con lo stesso ragionamento si dimostra che A è unione di componenti connesse di X.

(d) Un sottospazio connesso in uno spazio topologico X è necessariamente contenuto in una componente connessa di X. *[3 punti]*

Sia $C \subseteq X$ connesso. Se $C = \emptyset$ C è contenuto in qualunque sottospazio di X. Se $C \neq \emptyset$ Sia $x \in C$. Sia $C(x)$ la componente connessa di X che contiene x. Per definizione $C \subseteq C(x)$
(formula sopra)

(2) $d^*: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(P,Q) \longmapsto \begin{cases} 0 & se\ P = Q \\ d_e(O,P) + d_e(O,Q) & se\ P \neq Q \end{cases}$$

Dimostrare che:

(a) d^* è una metrica su X; [3 punti] siano $P = \binom{x}{y}$ $Q\binom{x'}{y'} \in \mathbb{R}^2$

$$d^*(P,Q) = \begin{cases} 0 & se \quad P = Q \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2} & se \quad P \neq Q \end{cases}$$

Per vedere che d^* è una metrica devo verificare che soddisfi le proprietà di una metrica:

1) $d^*(P,Q) = d^*(Q,P) \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^2$ ovvia dalla definizione

2) $d^*(P,Q) \geq 0$ chiara dalla def e

$d^*(P,Q) = 0 \iff P = Q$

$\boxed{\Leftarrow}$ è nella definizione

$\boxed{\Rightarrow}$ se $P \neq Q$ allora in particolare $P \neq O$ oppure $Q \neq O$. Dunque $d_e(P,Q) > 0$ oppure $d_e(P,Q) > 0$. In ogni caso $d^*(P,Q) > 0$.

3) disuguaglianza triangolare

dati $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$

$$d^*(P,Q) \leq d^*(P,R) + d^*(R,Q) \ ?$$

Vediamo i vari casi • se $P = Q$ ovvio per la (2)

• se $P \neq Q$ ma $R = P$ o $R = Q$ ovvio perché ho $=$

• se $P \neq Q$ e $R \neq P$ e $R \neq Q$

$$d^*(P,Q) = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} + \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}$$

$$d^*(P,R) + d^*(R,Q) = \sqrt{x_P^2+y_P^2} + \sqrt{x_R^2+y_R^2} + \sqrt{x_R^2+y_R^2} + \sqrt{x_Q^2+y_Q^2}$$

la disuguaglianza vale perchè $\sqrt{x_R^2+y_R^2} \geq 0$
(vale uguaglianza se e solo se $R=O$)

(b) la topologia indotta da d^* su $X \setminus \{O\}$ è quella discreta; [3 *punti*]

Su $X\setminus\{O\}$. Vediamo come sono fatte le bolle

$\forall P \in X\setminus\{O\}$ $\forall \varepsilon>0$

$$B_\varepsilon^{d^*}(P) = \{Q\in X\setminus\{O\} \mid d^*(P,Q)<\varepsilon\} =$$
$$= \{Q\in X\setminus\{O\} \mid d_e(P,O)+d_e(Q,O)<\varepsilon \text{ oppure } Q=P\}$$

poichè $P\in X\setminus\{O\}$ per ipotesi

$d_e(P,O)>0$ Sia $\alpha := d_e(P,O)$

Allora se prendo $\varepsilon<\alpha$ vale che

$$B_\varepsilon^{d^*}(P) = \{P\}$$

Questo mi dice che in $X\setminus\{O\}$ ogni punto è aperto con la topologia indotta da d^*: la topologia indotta è quella discreta.

(c) la topologia indotta da d^* su X lo rende non compatto né separabile; [4 *punti*]

Per risolvere questo esercizio controlliamo come sono fatte le bolle di centro O (che non abbiamo ancora studiato nel punto precedente). Dato $\varepsilon>0$

$$B_\varepsilon^{d^*}(O) = \{P\in\mathbb{R}^2 \mid d^*(P,O)<\varepsilon\} =$$
$$= \{O\} \cup \{P\in\mathbb{R}^2 \mid d_e(P,O)<\varepsilon\} =$$
$$= B_\varepsilon^{d_e}(O)$$

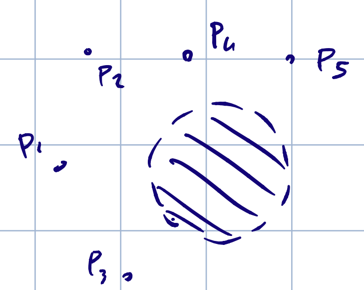
le bolle centrate in O per d^* coincidono con quelle di d_e.

Vediamo che X non è compatto: basta esibire un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti: considero

$$\{ B_1^{d^*}(0) , \{p\}, p \in X \setminus \{0\} \} =: \mathcal{A}$$

è un ricoprimento e i suoi elementi sono bolle per d^*, dunque aperte. Consideriamo una sua sottofamiglia finita $\{ B_1^{d^*}(0) , \{p_1 \dots p_k\} , p_i \in X \setminus \{0\} \}$ ($B_1^{d^*}(0)$ posso sempre aggiungerlo: se non $\exists$ sottoric. finiti di $\mathcal{A} \cup \{B_1^{d^*}(0)\}$ ovviamente non $\exists$ sottoric finiti di $\mathcal{A}$)

$$B_1^{d^*}(0) \cup \{p_1 \dots p_k\} \neq \mathbb{R}^2 \text{ ovviamente}$$



Inoltre vediamo che X non è <u>separabile</u>:

Ricordiamo la definizione di separabile:

X spazio topologico è separabile se $\exists\, D \subseteq X$ con D denso in X e D <u>numerabile</u>.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2 = X$ un sottospazio denso in X.

So che $\forall\, \underset{\neq \emptyset}{\mathcal{U}} \in \tau_{d^*}$ ($\mathcal{U}$ aperto per d^*) $\Rightarrow \mathcal{U} \cap D \neq \emptyset$

Questo significa in particolare, per quanto visto al punto (b), che $\forall\, x \in X \setminus \{0\}$ $\{x\} \cap D \neq \emptyset$.

ovvero $\forall\, x \in X \setminus \{0\}$, $x \in D$. Allora ho che

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq D \Rightarrow D$ non è numerabile.

3. *[9 punti]* Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 = [1, 0, 1]$, $P_2 = [0, 1, 1]$, $P_3 = [2, 1, 2]$.

(a) Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $L(P_i, P_j)$ per $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e determinare le loro intersezioni a due a due. I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale? *[3 punti]*

$L(P_i, P_j)$ per $i \neq j$ è una retta in $\mathbb{P}^2$, troviamo le equazioni cartesiane:

$L(P_1, P_2)$ ha equazione data dall'equazione del piano $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$

$x_0 + x_1 - x_2 = 0$ $= \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$L(P_1, P_3)$ è $\mathbb{P}\left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right)$ $\left\{\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\\beta\\\alpha+2\beta\end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

equazione $x_0 - x_2 = 0$

$L(P_2, P_3) = \mathbb{P}\left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right)$

equazione param $\left\{\begin{pmatrix}2\alpha\\\beta+\alpha\\\beta+2\alpha\end{pmatrix} \alpha\beta \in \mathbb{R}\right\}$

$\frac{1}{2}x_0 + x_1 - x_2 = 0$ $x_0 + 2x_1 - 2x_2 = 0$

$L(P_1, P_2) \cap L(P_2, P_3) = \begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 + 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

↳ nell'affine è $\operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$L(P_1, P_2) \cap L(P_2, P_3) = [0, 1, 1]$

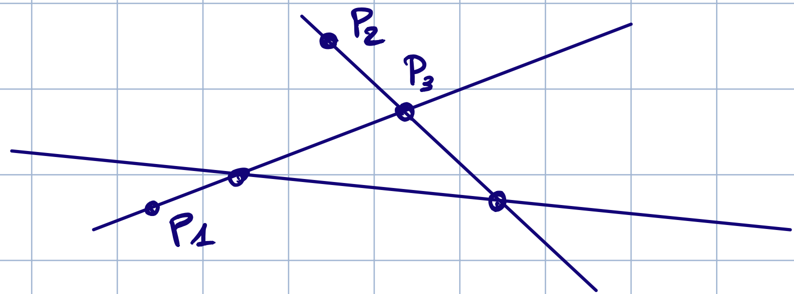
$L(P_1, P_2) \cap L(P_1, P_3) = \begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 = x_2 \end{cases}$

$\parallel$

$[1, 0, 1]$

$L(P_2,P_3) \cap L(P_1,P_3) = \begin{cases} x_0 + 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 = x_2 \end{cases}$

affine span $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \parallel \quad$ $[2,1,2] = P_3$ $\quad \begin{cases} x_0 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$



In questo caso (di $\mathbb{P}^2$) i punti sono in posizione generale se generano tutto $\mathbb{P}^2$ ovvero se non sono collineari: in questo caso dunque <u>sono</u> in posizione generale: se fossero collineari avrei che le rette coincidono.
(Equivalentemente basta vedere che $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$)

(b) Esisbire, se esiste, una proiettività che mandi, rispettivamente, P_1 in $[1,0,0]$, P_2 in $[0,1,0]$, P_3 in $[0,0,1]$. Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni? *[3 punti]*

Una tale proiettività esiste e non è unica.
Sto cercando M matrice di ordine 3 tale che
$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Poiché i tre vettori sono indipendenti la determinazione della loro immagine determina univocamente M. Ad esempio se prendo $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
ho $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$

$$= M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + 2M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

una tale matrice induce una proiettività come richiesta

una qualunque matrice della forma

$$M\left(\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \mu\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \gamma\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \forall \lambda,\mu,\gamma \in \mathbb{R}$$

induce una proiettività come richiesto. Ho infinite proiettività di questa forma. (se i punti fossero 4 in posizione generale e il 4o andasse in $(1,1,1)$ avrei un'unica proiettività)

(c) Esiste un punto $P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$? Se sì, fare un esempio e descrivere esplicitamente il luogo di tali punti. *[3 punti]*

Certo: quattro punti in $\mathbb{P}^2$ sono in posizione generale se e solo se ogni tripletta di punti nell'insieme è composta da punti non allineati. Per trovare P_4 come richiesto basta prendere P_4 non allineato con le coppie di punti $P_i P_j$ con $i \neq j$ in $\{1,2,3\}$, cioè

$$P_4 \in \mathbb{P}^2 \setminus L(P_1,P_2) \cup L(P_1,P_3) \cup L(P_2,P_3) =$$

$$= \{[x_0,x_1,x_2] \in \mathbb{P}^3 \mid (x_0-x_1+x_2)(x_0-x_2)(x_0+2x_1-2x_2) \neq 0\}$$

Ad esempio $P_4 = [1,0,0]$ va bene.