

Soluzioni scritto di Geometria 1 dell'8 settembre 2020

ES1 $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 12 = 0$

1a) Classifichiamola: la matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A'

$\det A \neq 0 \rightarrow$ conica non degenera

$$\det A' = 10 - 4 = 6 > 0$$

è un'ellisse

È immediato vedere che è a punti reali:

ad esempio $(\sqrt{6}, 0)$ appartiene al supporto

Dal punto di vista affine è un'ellisse non degenera a

punti reali. L'equazione canonica affine è $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Il centro si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \quad \text{il centro è } (0, 0)$$

1b) Cerchiamo ora l'equazione euclidea e contemporaneamente il cambiamento di coordinate che la porta in forma canonica euclidea.

A' ha spettro $\{4, 6\}$ con autospazi:

$$V_4 = \{x + 2y = 0\} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_6 = \{2x - y = 0\} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cambiamento di coordinate che porta la parte di grado 2 in forma canonica:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{-2x' + y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

sostituendo otterremo

$$x'^2 + 6y'^2 = 12$$

Forma canonica:

$$\frac{(x')^2}{12} + \frac{(y')^2}{2} = 1$$

1c) la chiusura proiettiva è

$$\overline{C} : -12x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0$$

È una conica non degenera a punti reali.

($\text{supp } C \subseteq \text{supp } \overline{C}$). Equazione canonica:

$$x_0'^2 + x_1'^2 - x_2'^2 = 0$$

Punti all'infinito: soluzioni in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di

$$\begin{cases} -12x_0 + 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

→ forma quadratica

definita positiva in $\mathbb{R}^2$:

l'unico vettore nullo
è nullo e' (0)

equiv. a  $\begin{cases} 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

che rappresenta l'insieme nullo in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

Dunque $\text{supp } C = \text{supp } \overline{C}$

d) I punti impropri di $\overline{C}$ come curve in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sono:
sempre le soluzioni di questo sistema .

Nei complessi abbiamo le seguenti radici del
polinomio $2t^2 + 4t + 5$:

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4(4-10)}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}i}{2}$$

Quindi in $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ abbiamo

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

$$= 2\left(x_1 - \left(\frac{-2 + \sqrt{6}i}{2}x_2\right)\right)\left(x_1 - \left(\frac{-2 - \sqrt{6}i}{2}x_2\right)\right) \text{ e i punti all'}$$

infinito sono: $\left[0, \frac{-2 + \sqrt{6}i}{2}, 1\right]$

ES 2 | X infinito, $p \in X$

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid p \notin A \text{ o } |X \setminus A| \text{ finito}\}$$

a) $\mathcal{T}$ è una topologia su X . Verifico le proprietà:

Ⓘ $p \notin \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$

$$|X \setminus X| = |\emptyset| = 0 \Rightarrow X \in \mathcal{T}$$

Ⓜ Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ famiglia di elementi di $\mathcal{T}$

Allora • se $\exists \alpha \in J$ t.c. $|X \setminus A_\alpha| < +\infty$, allora

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha) \subseteq X \setminus A_\alpha, \text{ quindi } \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Se invece $\forall \alpha \in J$ $|X \setminus A_\alpha|$ è infinito, allora per la definizione di $\mathcal{T}$, deve valere che $\forall \alpha \in J$ $p \notin A_\alpha$.
Quindi $p \notin \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ e dunque anche in questo caso $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Ⓜ Se $A, B \in \mathcal{T}$

Se $p \notin A$ o $p \notin B$, allora $p \notin A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$

Se invece $p \in A$ e $p \in B$, allora necessariamente

$|X \setminus A| < +\infty$ e $|X \setminus B| < +\infty$, quindi

$$|X \setminus (A \cap B)| = |(X \setminus A) \cup (X \setminus B)| < +\infty. \text{ Quindi } A \cap B \in \mathcal{T} \quad \underline{\text{OK}}$$

Omniamente valgono le inclusioni

cofinità $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$

Vediamos che sono strette: dato $x \in X \setminus \{p\}$, vale che

$\{x\} \in \mathcal{T}$ ma omiamente $\{x\} \notin \mathcal{K}$

Dal tra parte, p non è aperto per $\mathcal{K}$, ma è omiamente aperto per $\mathcal{D}$.

b) Conviene scrivere esplicitamente i chiusi di $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{C} := \{ C \subseteq X \mid p \in C \quad \forall \quad |C| < +\infty \}$$

Sia ora $S \subseteq X$

Se $p \in S$, o $|S| < +\infty$, allora S è chiuso e dunque $\overline{S} = S$.

Supponiamo ora che $p \notin S$ e che S sia infinito.

Osserviamo che $S \cup \{p\}$ è chiuso. Dunque

$$S \subseteq \overline{S} \subseteq S \cup \{p\} \Rightarrow \overline{S} = S \cup \{p\}.$$

Ricordiamo che uno spazio topologico è separabile se contiene un sottoinsieme numerabile e denso.

Se $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ stesso è denso e numerabile in sé, quindi $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ è separabile con qualunque topologia.

Se $X = \mathbb{R}$, quanto osservato prima ci dice che

dato $S \subseteq \mathbb{R}$ numerabile $\overline{S} \subseteq S \cup \{p\} \neq \mathbb{R}$,

quindi $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è separabile.

c) Poiché ogni punto di X è di cardinalità 1, i punti sono chiusi: $(X, \mathcal{T})$ è T_1 .

Siano ora $x \in X$ e $C \subseteq X$ chiuso tale che $x \notin C$.

Cerco A e $B \in \mathcal{T}$ tali che $x \in A$, $C \subseteq B$ e $A \cap B = \emptyset$.

se $x \neq p$ allora $\{x\}$ è aperto per $\mathcal{T}$ e $X \setminus \{x\} \supseteq C$

è un aperto: prendo $A = \{x\}$ $B := X \setminus \{x\}$.

Se $x = p$, allora C è un chiuso che non contiene p ,

dunque $|C| < +\infty$. Prendo allora $A = X \setminus C$ e $B = C$.

Sì, $(X, \mathcal{T})$ è regolare.

d) X non è connesso: ad esempio dato $x \in X \setminus \{p\}$ $\{x\}$ e $X \setminus \{x\}$ sono aperti e chiusi disgiunti la cui unione è X .

Per questa stessa osservazione vedo subito che ogni sottospatto di X con più di un elemento è sconnesso: le componenti connesse di X sono i suoi punti.

e) X è compatto: Sia $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un ricoprimento aperto di (X, τ) . Siccome $\mathcal{A}$ è un ricoprimento $\exists \bar{\alpha} \in J$ tale che $p \in U_{\bar{\alpha}}$. Allora necessariamente per la definizione di τ abbiamo che $X \setminus U_{\bar{\alpha}}$ è finito: $X \setminus U_{\bar{\alpha}} = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$

Considero ora $\forall i=1, \dots, n$ un $U_{\alpha_i} \in \mathcal{A}$ tale che $x_i \in U_{\alpha_i}$. Per costruzione

$\{U_{\bar{\alpha}}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$.