

Soluzioni scritto 23 settembre 2020 - Geometria 1

1) ^{1a)} Considero v_i vettori tali che $[v_i] = P_i$ $i=0, \dots, 3$ e la matrice che ha i v_i come colonne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - (1(0) + -2) = 2 \neq 0$$

I primi 4 sono in posizione generale

ora, però $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$

quindi i 5 punti non sono in posizione generale.

1b) 5 punti nello spazio affine A^3 non sono mai affinemente indipendenti (i 4 vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_4}$ non possono essere indipendenti in $\mathbb{R}^3$)

Invece i punti $P_0, \dots, P_4$ sono affinemente indipendenti in $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$. le coordinate affini di U_2 sono

$$t_1 = \frac{x_0}{x_2} \quad t_2 = \frac{x_1}{x_2} \quad t_3 = \frac{x_3}{x_2} \quad \text{e abbiamo}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{che sono indipendenti in } \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow P_0, P_1, P_2, P_3$ sono affinemente indipendenti in U_2 .

1c) Come visto nel punto (1a)

$L(P_1, \dots, P_4) = IP(\text{span}(v_1, \dots, v_4)) = IP(\text{span}(v_1, \dots, v_3))$,
che ha dimensione $\dim(\text{span}(v_1, v_2, v_3)) - 1 = 3 - 1 = 2$ è iperpiano.
Basta cercare una equazione di $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$
ad esempio la posso trovare così:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

||

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot x_0 - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} x_2 +$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

(controllate sempre che i punti la soddisfino)

1d) Come visto in 1a) P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale, e abbiamo che $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$.

Per avere un riferimento proiettivo, ci basta prendere $P = [v]$ con $v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ con $\lambda_i \neq 0 \forall i=0, \dots, 3$

Per comodità prendiamo come punto unita' $v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3$

con questa scelta le coordinate di P_4 sono proprio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (altrimenti avrei moltiplicato per il } \lambda_i \text{ corrispondente)}$$

$$1e) L(P_1, \dots, P_4) = \{ [x] \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$$

P_1, P_2, P_3 e P_4 non sono in posizione generale come visto nel primo punto. Per trovare una proiezione come richiesto basta prendere un automorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $\langle v_1, \dots, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sia autospazio rispetto a un autovalore λ , e ci sia un altro autovalore distinto.

$$\langle v_1, \dots, v_4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Prendo ad esempio

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e impongo che

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un tale automorfismo esiste perché i 4 vettori che prendo in partenza e in arrivo sono indipendenti in $\mathbb{R}^4$

$$\leadsto \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leadsto \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad \tau = \{ (a, +\infty), a \in \mathbb{R} \} \cup \{ \mathbb{R}, \emptyset \}$$

2a) ① $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau$ per definizione.

② Sio $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau$ famiglia di aperti di τ . Devo vedere $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Non è limitativo supporre (poiché $\mathbb{R} \cup B = \mathbb{R} \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$ e $\emptyset \cup B = B \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$)

che $\forall \alpha \in A \quad U_\alpha = (a_\alpha, +\infty)$ per un certo $a_\alpha \in \mathbb{R}$

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, +\infty) = (\underbrace{\inf(a_\alpha)}_{\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}}, +\infty) \in \tau \quad \underline{\text{OK}}$$

③ Siano $U, V \in \tau$. Devo vedere che $U \cap V \in \tau$.

Non è limitativo supporre che $U = (a, +\infty)$, $V = (b, +\infty)$

per certi $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $U \cap V = (\max\{a, b\}, +\infty) \in \tau \quad \underline{\text{OK}}$

Osservo ora che ogni $U \in \tau$ appartiene alla topologia euclidea τ_e . D'altra parte $(0, 1) \in \tau_e$ ma $(0, 1) \notin \tau$. Quindi τ è strettamente meno fine di τ_e .

2b) $\forall U, V \in \tau$ con $U, V \neq \emptyset$ abbiamo che

$$U \subseteq V \quad \text{oppure} \quad V \subseteq U.$$

Quindi $U \cap V = U$ oppure V , in ogni caso $\neq \emptyset$

Quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ non è T_2 (ha due elementi distinti) osservo.

Poiché metrizzabile $\Rightarrow T_2$, $(\mathbb{R}, \tau)$ non è metrizzabile. (Potevamo anche usare che $(\mathbb{R}, \tau)$ non è T_1 :

i punti non sono chiusi: $\mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty) \notin \tau$

$\forall p \in \mathbb{R}$, e metrizzabile $\Rightarrow T_1$)

2c) No, non è compatto: ad esempio

$\mathcal{A} = \{ (-n, +\infty) \mid n \in \mathbb{N} \}$ è un ricoprimento aperto per τ ma se prendo finiti

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},$$

$\bigcup_{i=1}^k (-n_i, +\infty) = (-(\max(n_i)), +\infty) \subsetneq \mathbb{R}$
 Quindi qualunque sottofamiglia finita di $\mathcal{A}$ non è un sottoricoprimento.

$$2d) \quad E = \{-n, n \in \mathbb{N}\} \quad F = [0, +\infty) \quad G = \{0\}$$

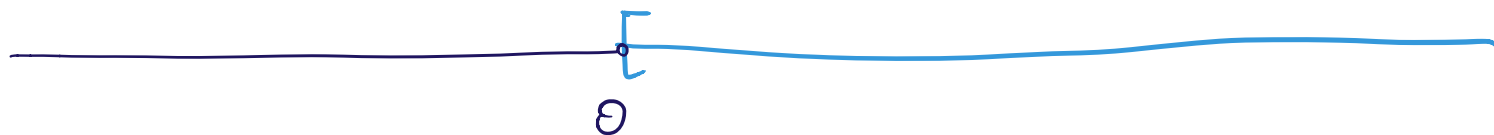
Ricordiamo che dato $S \subseteq \mathbb{R}$

$$\overset{\circ}{S} = \bigcup \{A \mid A \in \tau, A \subseteq S\} \quad \overline{S} = \bigcap \{C \mid \mathbb{R} \setminus C \in \tau, C \supseteq S\}$$

E



F



G



L'unico aperto di τ contenuto in E e G è $\emptyset$

$$\text{Quindi } \overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{G} = \emptyset$$

invece per quanto riguarda $F = [0, +\infty)$ osservo che

$$(0, +\infty) \subseteq F \quad \text{quindi} \quad (0, +\infty) \subseteq \overset{\circ}{F}$$

D'altra parte $F = (0, +\infty) \cup \{0\}$ non è aperto per τ ,

quindi $\overset{\circ}{F} = (0, +\infty)$.

Per la chiusura, scriviamo esplicitamente i chiusi di τ : $\mathcal{C} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

Osservo che l'unico chiuso che contiene F è $\mathbb{R}$,

quindi $\overline{F} = \mathbb{R}$

Mentre abbiamo che $E \subseteq (-\infty, 0] \supseteq G$

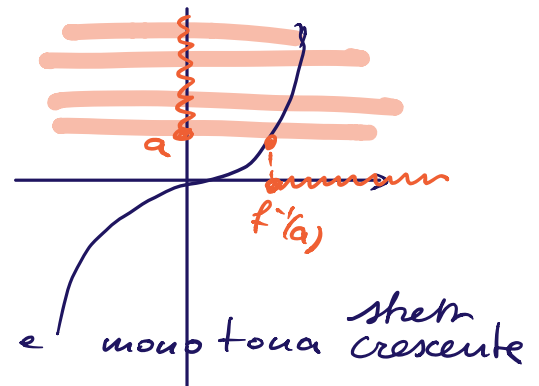
inoltre $0 \in E$ e $0 \in G$, quindi qualunque chiuso C che contiene E/G contiene 0 . Per come sono fatti i chiusi $\text{lo } (-\infty, 0] \subseteq C$. Allora

$$\overline{E} = \overline{G} = (-\infty, 0].$$

Osserviamo che nessuno di questi sottoinsiemi è aperto né chiuso (non coincidendo con parte interna o chiusura)

2e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$

Devo controllare se la controimmagine di aperti di τ è ancora aperta. Osservo che f è invertibile



$$f^{-1}((a, +\infty)) = (f^{-1}(a), +\infty) \in \tau$$

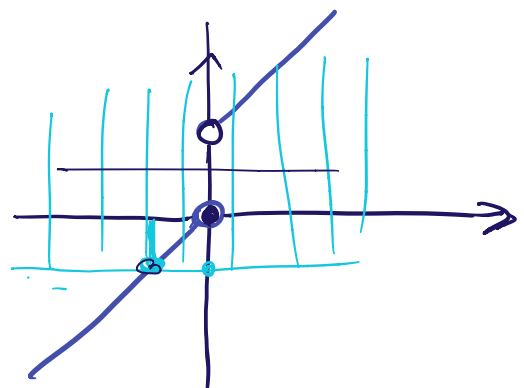
$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

questo vale sempre!

OK è continua

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



sia $a \in \mathbb{R}$

$$g^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > a\} =$$

$$= \begin{cases} (a-1, +\infty) & \text{se } a > 1 \\ (0, +\infty) & \text{se } a \in [0, 1] \\ (a, +\infty) & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Comunque
appartiene
ancora a τ
si è continua.

Oss: la funzione

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

invece
NON è continua
con τ nel dominio
e nel codominio

infatti $h^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty)) = [0, +\infty) \notin \tau$