# Soluzioni scritto di Geometria 1 del 21 gennaio 2020

Lidia Stoppino e Sara Torelli

## 1) Vero o Falso?

Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.

Dico che $f$ soddisfa (P) se

$$\forall\, C \subseteq Y \text{ compatto (in } Y) \quad f^{-1}(C) \subseteq X \text{ è compatto (in } X)$$

(a) Ogni $f: X \longrightarrow Y$ continua e suriettiva soddisfa (P)

FALSO: Controesempio: sia

$$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad p(x,y) := x$$

la proiezione sul primo fattore, con la topologia euclidea sia nel dominio sia nel codominio. L'applicazione $p$ è continua e suriettiva, ma, dato ad esempio $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ che è compatto (perchè è un singoletto) $p^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, che non è compatto in $\mathbb{R}^2$ poichè non è limitato (stiamo usando Heine - Borel).

(b) Se $Y$ ha la topologia discreta, allora $f: X \to Y$ soddisfa (P).

Osserviamo che se $Y$ ha la topologia discreta $\mathcal{O}_Y = \mathcal{P}(Y)$, ogni suo sottospazio ha la topologia indotta discreta.

Uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se ha cardinalità finita.
Dunque la proprietà (P) sotto queste ipotesi si può riformulare così:
(P) ogni sottoinsieme di cardinalità finita di $Y$ ha controimmagine compatta in $X$.
Risulta chiaro ora che l'affermazione è
<u>**FALSA**</u>
Come controesempio, possiamo prendere l'applicazione costante da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ al singoletto $\{p\}$

$$
\begin{aligned}
c : \mathbb{R} &\longrightarrow \{p\} \\
x &\longmapsto p
\end{aligned}
$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = p$
Ovviamente $c$ è continua (ogni applicazione costante lo è) e suriettiva.
Ma $\{p\}$ stesso è compatto, mentre $c^{-1}(p) = \mathbb{R}$ che non è compatto in quanto non limitato (sempre per Heine-Borel).

(c) Se $X$ e $Y$ hanno la topologia discreta e $f$ possiede la proprietà (P), allora

$\forall y \in Y \quad f^{-1}(y)$ è un insieme finito.

<u>VERO</u>: abbiamo dimostrato nell'osservazione sulla proprietà (b) che se $Y$ ha la topologia discreta (P) equivale a:

$\forall F \subseteq Y$ sottoinsieme finito $f^{-1}(F)$ è compatto in $X$.

Se supponiamo che $X$ abbia la topologia discreta anch'esso, $f^{-1}(F) \subseteq X$ è compatto se e solo se $\#(f^{-1}(F)) < +\infty$.

Dunque sotto queste ipotesi (P) è equivalente a:

$\forall F \subseteq Y$ finito, $f^{-1}(Y)$ è finito in $X$.

In particolare dunque questo è vero per ogni $F$ di cardinalità 1.

(d) Se $f: X \to Y$ è anche aperta e $Y$ è T2 allora vale (P).

<u>FALSO</u>: Il controesempio dato nel punto (a) vale anche per questo punto.

Infatti, $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ proiezione sul primo fattore è anche aperta, come tutte le proiezioni da uno spazio prodotto su uno dei fattori.

(2) Si consideri la famiglia di sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea) dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$

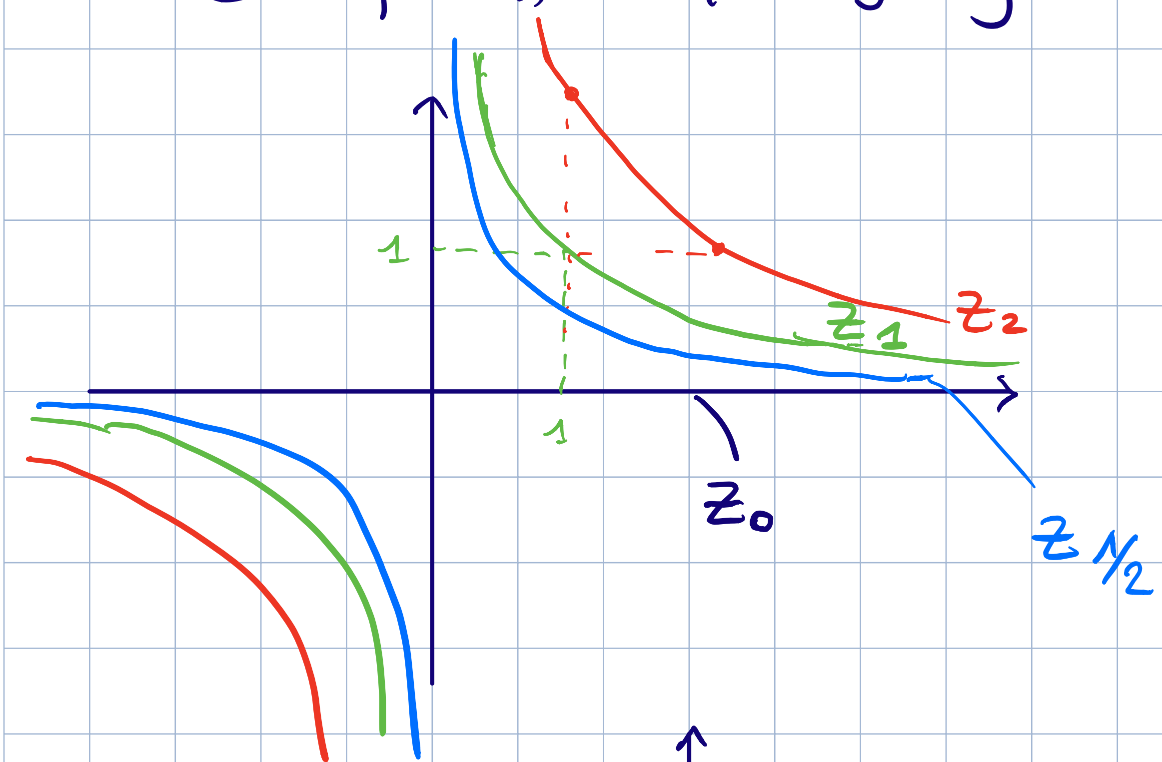
$$X_a := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy-a)(x^2+y^2-1)=0 \}$$

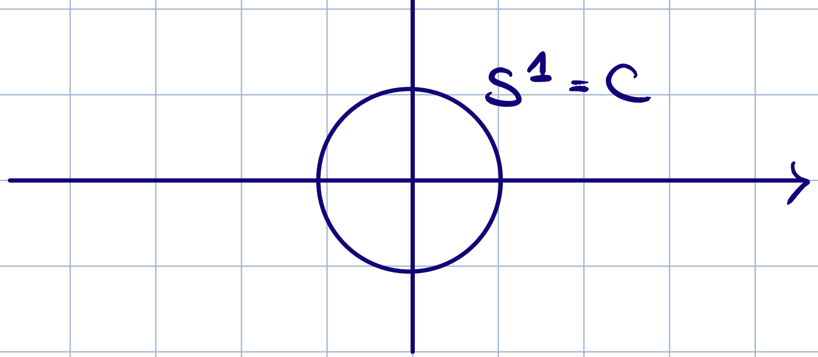
(a) Per quali $a \geq 0$ $X_a$ è connesso/compatto/T2?

$X_a$ è l'unione degli spazi

$$Z_a = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a \}$$

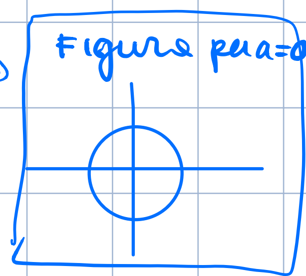
e $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \} = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$



Compattezza di $X_a$: per Heine-Borel sappiamo che un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
$Z_a$ non è limitato per nessun $a \geq 0$ (infatti non lo è per nessun $a \in \mathbb{R}$): infatti, per esempio, $\forall N \in \mathbb{N}^+$ il punto $\left(\frac{a}{N}, N\right) \in Z_a$. Dunque neanche $X_a$ è limitato: $X_a$ non è compatto per nessun $a \geq 0$.

Connessione: per ogni $a \neq 0$ $Z_a$ ha due componenti connesse (i due rami dell'iperbole). Dobbiamo capire per quali $a$ queste componenti intersecano non banalmente $S^1$.
Per $a=0$ $Z_0 = \{xy=0\} = \{x=0\} \cup \{y=0\}$ (una sola componente)
e $Z_a \cap S^1 \neq \phi$




Metto a sistema per $a \neq 0$
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\dfrac{a}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{y^2}+y^2=1 \\ x=a/y \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+y^4=y^2 \\ x=a/y \end{cases}$$

ottengo dunque ponendo $t=y^2$ $\quad t^2-t+a^2=0$

$\Delta = 1-4a^2 \qquad \Delta \geq 0$ se e solo se $1-4a^2 \geq 0 \qquad 4a^2 \leq 1$

se e solo se $a^2 \leq 1/4 \quad (a \geq 0) \iff a \leq 1/2$

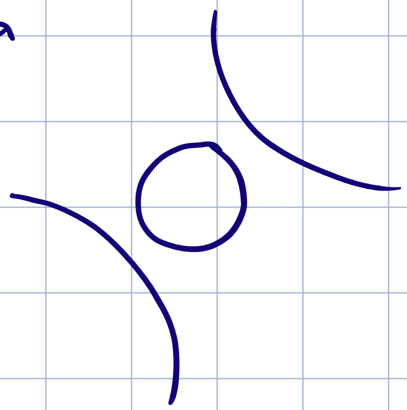
Se $a > 1/2 \quad S^1 \cap Z_a = \phi$

Se $a \leq 1/2$ ho $\quad t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2}$ sono entrambe le radici maggiori o uguali a zero

dunque se $a \leq 1/2 \quad S^1 \cap Z_a \neq \phi$

per $a > 1/2$ ho

$X_a$



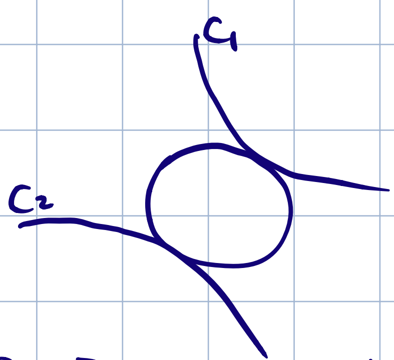
<u>sconnesso.</u> Ad esempio

$S^1$ e $Z_a$ sono chiusi disgiunti in $X_a$

(sono chiusi perchè zeri di funzioni continue in $\mathbb{R}^2$ che è T2)

la cui unione è $X_a$.

<u>Per $a = 1/2$</u>




$X_{1/2}$ ha due componenti connesse

$X_{1/2} = C_1 \cup C_2$ ($C_1$ e $C_2$ sono connesse in quanto omeomorfe ad $\mathbb{R}$)

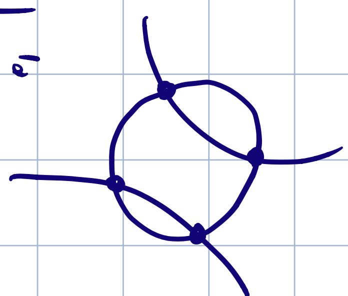
e $C_1 \cap S^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$C_2 \cap S^1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Dunque $S^1 \cup C_1$ è connesso perchè unione di connessi con intersezione non banale, e $(S^1 \cup C_1) \cup C_2 = X_{1/2}$ è connesso per lo stesso motivo.

<u>per $a > 1/2$</u>

la figura è questa



Per le stesse ragioni discusse nel punto precedente $X_a$ è <u>connesso</u>.

→ <u>Separazione</u>: $X_a$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che è uno spazio metrizzabile. Dunque $X_a$ è esso stesso T2.

<u>RIASSUMENDO</u>:

$X_a$ non è mai compatto per nessun $a$

$X_a$ è connesso se e solo se $a \geq 1/2$

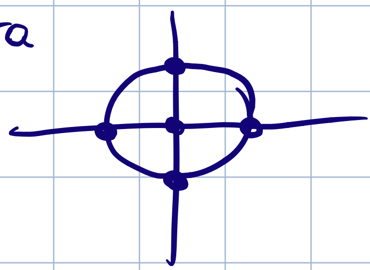
$X_a$ è T2 $\forall a$

(b) Suddividere gli $X_a$ in classi di omeomorfismo al variare di $a \geq 0$.

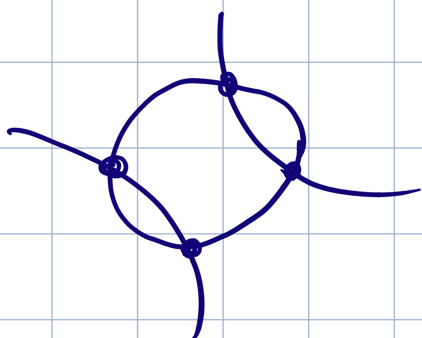
- Sicuramente se $a \in [0, 1/2]$ e $b > 1/2$ $X_a \not\simeq X_b$ perché $X_a$ è connesso, $X_b$ non lo è, e la connessione è una proprietà topologica.

Ora consideriamo lo spazio per $a \in [0, 1/2]$:

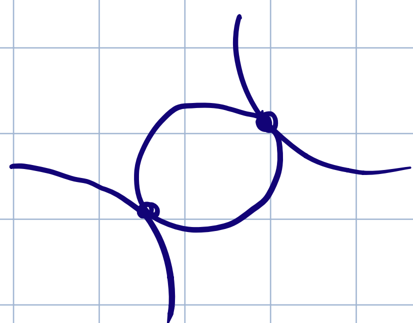
$X_0$ ha questa forma:



$X_a$ per $a \in (0, 1/2)$



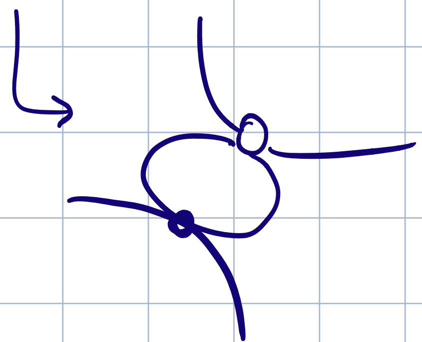
$X_{1/2}$



Affermo che:

1. per $a, b \in (0, 1/2)$ $X_a \simeq X_b$
2. $X_0 \not\simeq X_a$ per $a \in (0, 1/2)$
3. $X_0 \not\simeq X_{1/2}$
4. $X_a \not\simeq X_{1/2}$ per $a \in (0, 1/2)$

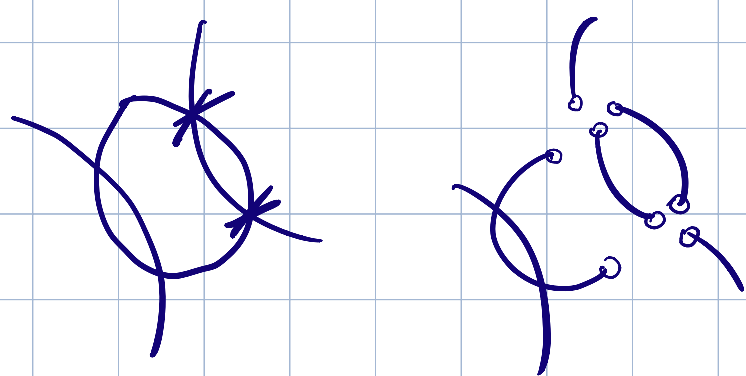
per dimostrare 3 possiamo osservare che $\forall$ punto $p \in X_0$, $X_0 \setminus \{p\}$ ha al più 2 componenti connesse, mentre $\exists\, q \in X_{1/2}$ tale che $X_{1/2} \setminus \{q\}$ ha 3 componenti connesse:



Dunque non può esistere un omeomorfismo tra $X_{1/2}$ e $X_0$.

le stesse considerazioni permettono di dimostrare il 4° punto.

Per quello che riguarda il punto 2, possiamo osservare che $\forall\ p, q \in X_0$ coppia di punti distinti $X_0 \setminus \{p, q\}$ ha al più 4 componenti connesse, mentre esistono due punti che sconnettono $X_a$ ($a \in (0, 1/2)$) in 5 componenti connesse:



Un modo analogo per dimostrare queste affermazioni è il seguente:
In $X_0$ ho cinque punti che possiedono un intorno omeomorfo a $\times$ $(xy=0 \subseteq \mathbb{R}^2)$
In $X_{1/2}$ ho 2 punti di questo tipo,
In $X_a$ con $a \in (0, 1/2)$ ho 4 punti di questo tipo.
Un omeomorfismo necessariamente manda punti di questo tipo in punti di questo tipo quindi i tre spazi considerati non possono essere omeomorfi.

<u>Classi di omeomorfismo</u>:

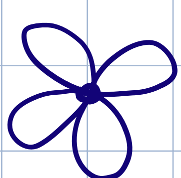
$$\{X_a \ , a > 1/2\} \quad \{X_a, \ a \in (0, 1/2)\} \quad \{X_0\} \quad \{X_{1/2}\}$$

(c) Sia $Y_a = X_a/\sim$ dove $\sim$ è la seguente relazione di equivalenza su $X_a$:

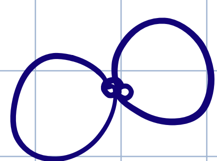
$$(x,y) \sim (x',y') \text{ se e solo se } (x,y) = (x',y') \text{ oppure } xy = x'y' = a$$

Questa relazione di equivalenza è la <u>contrazione a un punto</u> del sottospazio $Z_a$:

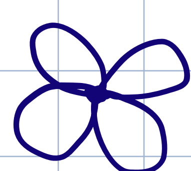
$X_0/\sim = Y_0$



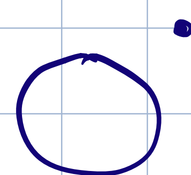
$X_{1/2}/\sim = Y_{1/2}$



$X_a/\sim = Y_a$ $a \in (0, 1/2)$

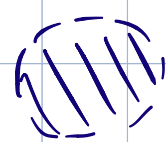


$X_a$ $a > 1/2$



- $X_a$ per $a > 1/2$ non è connesso, ma essendo unione di $S^1$ con due punti è compatto ed è T2.
- Gli altri spazi sono omeomorfi a unioni di copie di $S^1$ come in figura, dunque sono connessi e compatti e sono T2.

(d) (BONUS) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco unitario e sia $\approx$ la relazione $(x,y) \approx (x',y')$ se e solo se $(x,y)=(x',y')$ oppure $x^2+y^2<1$ e $x'^2+y'^2<1$. Sto dunque contraendo ad un punto la parte interna del disco



$\mathring{D}^2$

Lo spazio quoziente non è T2: infatti il punto in $D^2/\approx$ che corrisponde alla classe di equivalenza di $\mathring{D}^2$ non è chiuso perché $\mathring{D}^2$ non è chiuso in $D^2$.
Dunque $Z$ non è omeomorfo a nessuno degli spazi $X_a$ né $Y_a$.

(3) $\mathcal{C}: 3x^2+3y^2+2xy-8=0$ conica in $\mathbb{E}^2$.

(a) Classificarla in $\mathbb{E}^2$ e in $\mathbb{A}^2$

Matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det A' = 9-1 = 8 >$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è un'ellisse non degenere

È evidente che $\mathcal{C}$ è a punti reali

(ad esempio $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$ appartiene al supporto di $\mathcal{C}$)

Equazione canonica affine di $\mathcal{C}$ : $x^2+y^2=1$

Equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ : nel trovarla troviamo il cambiamento di coordinate richiesto nel punto (b)

Autovalori di $A'$ :

$$P_{A'}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = (t-2)(t-4) \qquad \text{Autovalori: } 2, 4$$

$V_2 = \{x+y=0\}$ $\quad V_4 = \{x-y=0\}$

Matrice ortogonale tale che $(M')^T A' M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Effettuando il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$ otteniamo come equazione per $\mathcal{C}$

nelle coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$\mathcal{C}: \quad 2x'^2 + 4y'^2 - 8 = 0$

Dunque l'equazione canonica euclidea $\quad \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{2} = 1$

(b) Il cambiamento di coordinate è quello descritto prima:
$$\begin{cases} x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(c) $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$

Vedo $\mathbb{A}^2$ come l'aperto $U_0 = \{ [x_0 : x_1 : x_2] \mid x_0 \neq 0 \} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

e le coordinate affini su $\mathbb{A}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ corrispondono a $\begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \end{pmatrix}$ su $U_0$

L'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ è

$$\overline{\mathcal{C}} : \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_0 = 0$$

I punti all'infinito di $\overline{\mathcal{C}}$ sono i punti di intersezione tra $\overline{\mathcal{C}}$ e la "retta all'infinito" $\quad x_0 = 0$

Metto a sistema
$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

forme quadratica definita positiva, dunque l'unica soluzione è $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ cioè

$$\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\} = \emptyset \quad \text{in} \quad \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

Non esistono punti impropri, coerentemente con la teoria che ci dice che in generale la chiusura di una parabola non degenere ha 1 punto improprio, di una iperbole non deg. ne ha 2, di una ellissi non deg. non ne ha nessuno.