Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 13 gennaio 2020
Giustificare sempre le risposte.

1. *[12 punti]* Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un sottospazio aperto e chiuso in uno spazio topologico è necessariamente connesso. *[3 punti]*
   (b) Un sottospazio connesso in uno spazio topologico X è necessariamente aperto e chiuso in X. *[3 punti]*
   (c) Un sottospazio non vuoto aperto e chiuso in uno spazio topologico X contiene necessariamente una componente connessa di X. *[3 punti]*
   (d) Un sottospazio connesso in uno spazio topologico X è necessariamente contenuto in una componente connessa di X. *[3 punti]*

2. *[10 punti]* Sia $X = \mathbb{R}^2$ dotato dell'usuale metrica euclidea d_e. Definiamo

$$\begin{array}{rccl} d^* : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & se\ P = Q \\ d_e(O,P) + d_e(O,Q) & se\ P \neq Q \end{cases} \end{array}$$

   dove $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare che:
   (a) d^* è una metrica su X; *[3 punti]*
   (b) la topologia indotta da d^* su $X \setminus \{O\}$ è quella discreta; *[3 punti]*
   (c) la topologia indotta da d^* su X lo rende non compatto né separabile; *[4 punti]*

3. *[9 punti]* Si considerino in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 = [1,0,1], P_2 = [0,1,1], P_3 = [2,1,2]$.
   (a) Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi $L(P_i, P_j)$ per $i, j \in \{1,2,3\}$ e determinare le loro intersezioni a due a due. I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale? *[3 punti]*
   (b) Esisbire, se esiste, una proiettività che mandi, rispettivamente, P_1 in $[1,0,0]$, P_2 in $[0,1,0]$, P_3 in $[0,0,1]$. Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni? *[3 punti]*
   (c) Esiste un punto $P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$? Se sì, fare un esempio e descrivere esplicitamente il luogo di tali punti. *[3 punti]*