FOGLIO 4 - ESERCIZI PASQUALI

L. Stoppino, corso di Geometria 1
Università di Pavia, a.a. 2019/20

1. Dati 5 punti in posizione generale in $\mathbb{P}^3_K$, è vero che essi sono a tre a tre non allineati? Viceversa, se prendo 5 punti in $\mathbb{P}^3_K$ a tre a tre non allineati, essi sono in posizione generale?

2. (dal Foglio 3) Siano A, B, C tre punti di un piano proiettivo $\mathbb{P}$ in posizione generale; sia r una retta che non contenga nessuno dei tre punti. Si dimostri che esiste un'unica proiettività f di $\mathbb{P}$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$, $f(r) = r$.

3. In $\mathbb{P}^2_K$, considero il punto $P = [0, 0, 1]$.
   (a) Scrivere le equazioni di tutte le rette che passano per P (lo chiameremo il fascio di rette per P).
   (b) Verificare che se considero la carta affine $U_1 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a x_1, il fascio del punto precedente diventa un fascio proprio di rette in $\mathbb{A}^2_K$ (passanti da quale punto?).
   (c) Verificare che se considero la carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2_K$ rispetto a x_0, il fascio del punto (a) diventa un fascio improprio di rette (di che direzione?).

4. Siano P_0, P_1, P_2 punti di $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$. Si consideri l'inclusione $\mathbb{A}^2_\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ fatta rispetto a x_0. Discutere le seguenti affermazioni (possono essere vere o false- per verificare che false bisogna fare un controesempio):
   (a) Se P_0, P_1, P_2 sono affinemente indipendenti, allora essi sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$.
   (b) Se P_0, P_1, P_2 non sono affinemente indipendenti, comunque possono essere in posizione generale in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$.
   (c) Supponiamo che P_0, P_1, P_2 siano affinemente indipendenti. Sia $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$. Dato qualunque punto $Q \in \mathbb{H}_0$, i punti P_0, P_1, P_2, Q sono in posizione generale.

5. In un piano affine $\mathbb{A}$ siano date due terne di rette $\{l_1, l_2, l_3\}$ e $\{r_1, r_2, r_3\}$ ciascuna composta da tre rette a due a due non parallele e tali che non c'è nessun punto in comune a tutte e tre.
   (a) È vero che esiste sempre un'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(l_i) = r_i$ per $i = 1, 2, 3$? In caso positivo, f è unica?
   (b) Si calcoli esplicitamente una tale affinità nel caso in cui $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$, con $(x, y, z) \in \mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ e le equazioni cartesiane delle rette siano:

$$\begin{array}{ll} l_1 : x = 0 & \qquad r_1 : x + y = 1 \\ l_2 : y = 0 & \qquad r_2 : 2x + y = 0 \\ l_3 : x - y = 1 & \qquad r_3 : x = 1 \end{array}$$

Si consideri ora $\mathbb{A}$ come carta affine in un piano proiettivo $\mathbb{P}$, e siano $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$ e $\{\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3\}$ le chiusure proiettive delle rette della prima terna.

(c) Esiste una proiettività F di $\mathbb{P}$ tale che $F(\overline{l_i}) = \overline{r_i}$ per $i = 1, 2, 3$? È unica?

(d) Si calcolino esplicitmante le possibili F nel caso del punto (b), con $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ carta affine di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ rispetto a x_0.

6. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$P_0 = [1, 0, -1],\ P_1 = [1, 2, 0],\ P_2 = [-1, -1, 1],\ P_3 = [1, -1, -2];$$

(a) Stabilire se sono in posizione generale.

(b) Si scriva l'equazione della retta $L(P_0, P_1)$.

(c) Esibire, se esiste, un punto Q distinto dai precedenti tale che P_0, P_1, P_2, Q non siano in posizione generale.

(d) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$ e $f([1, 1, 1]) = P_3$.

(e) Esiste una proiettività che fissa P_0, P_1, P_2 e non è l'identità? Se sì, fare un esempio.

7. (Fortuna, Frigerio, Pardini, Es 2.11) Siano r e s rette distinte di $\mathbb{P}^3_K$ e sia f una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ tale che $Fix(f) = r \cup s$.

(a) Verificare che r ed s sono sghembe.

(b) Per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$ si denoti con l_P la retta congiungente P e $f(P)$. Si provi che, per ogni $P \in \mathbb{P}^3_K \setminus \{r \cup s\}$, la retta l_P interseca sia r che s.