Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 26 settembre 2019
Giustificare sempre le risposte.

1. [*12 punti*] Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio] Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.
   (a) Se f è chiusa, allora è un'identificazione (cioè la topologia su Y è la topologia quoziente).
   (b) Se f è un'identificazione allora è chiusa.
   (c) Se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X ha la topologia discreta.
   (d) Se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X non è connesso.

2. [*10 punti*] Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea):
$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]\};$$
$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [-1, 1]\};$$
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in (0, 1)\} :$$
$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in (-1, 1)\}$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\};$$
$$F := S^1 \times (0, 1).$$
   (a) Trovarne parte interna e chiusura come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Stabilire quali di essi sono compatti, connessi, e che proprietà di separazione hanno.
   (c) Suddividerli in classi di omeomorfismo.

3. [*9 punti*] Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\mathcal{C}\colon 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x = 0$ nel piano euclideo E^2.
   (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{E}^2$.
   (b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma tale equazione.
   (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e se ne calcolino i punti impropri.