

Geometria I
CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 7 settembre 2021

Giustificare sempre le risposte.

1. [15 punti] Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}: 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x = 0$$

nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

- (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea e l'equazione canonica affine.
 - (b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee e il cambiamento affine necessari affinché assuma l'equazione canonica.
 - (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e se ne calcolino i punti impropri.
2. [16 punti] Discutete le seguenti affermazioni [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio] Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.
- (a) Se f è chiusa, allora è un omeomorfismo.
 - (b) Se f è chiusa, allora è un'identificazione (cioè la topologia su Y è la topologia quoziente).
 - (c) Se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X ha la topologia discreta.
 - (d) Se Y ha la topologia discreta e $|Y| > 1$ allora X non è connesso.
 - (e) Se X ha la topologia concreta allora Y è compatto.

1) Si vedano le soluzioni dell'esercizio corrispondente dell'esame di Geometria 1 del 26 settembre 2019 (sul sito stoppino.it)

2) Sia $f: X \rightarrow Y$ continua e suriettiva tra spazi topologici.

a) Se f è chiusa, allora è un omeomorfismo:

è falso. (^{idea} non è detto che f sia invertibile). Controesempio:

$p: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ proiezione al primo fattore

$$p(x, y) = x$$

è continua (ovviamente). Verifico che è chiusa:

Sia $C \subseteq [0,1]^2$ un chiuso: è chiuso in un compatto $\nearrow$ quindi è compatto.

p continua $\Rightarrow p(C)$ compatto in $[0,1]$

$p(C)$ è compatto in $[0,1]$ che è $T_2 \Rightarrow$

$p(C)$ è chiuso, come volevo.

D'altra parte p ovviamente non è biettiva

b) Vero: è una proposizione fatta a lezione.

Una applicazione suriettiva continua e

chiusa è una identificazione. Per la dimostrazione

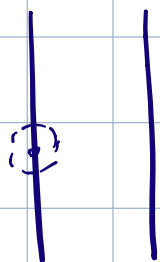
si veda il libro di testo.

c) Falso: si prenda ad esempio

$X = \{x=0\} \cup \{x=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topologia

indotta da

quella euclidea
su $\mathbb{R}^2$



$\tau|_X$

Osserveremo che $T_{e|X} \neq \mathcal{D}_X$ (ad esempio
ogni aperto non vuoto di $T_{e|X}$ contiene infiniti punti)
Si consideri

$$f: X \longrightarrow \{0, 1\} =: Y$$

con definita: $f(x, y) = x$

Si consideri su Y la topologia discreta.

È immediato verificare che f è continua e
suriettiva.

d) Vero:

Supponiamo per assurdo che

$|Y| > 1$ e $T_Y = \mathcal{D}_Y$ ma che X sia
connesso. Siccome $|Y| > 1$, fissato

un qualunque $y \in Y$ ho che $Y \setminus \{y\} \neq \emptyset$

$A = \{y\}$ e $B = Y \setminus \{y\}$ sono due aperti

non vuoti in Y tali che $A \cup B = Y$ e $A \cap B = \emptyset$

(questo è dire che Y è sconnesso)

Considero $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ in X .

Siccome f è continua sono aperti.

Siccome f è suriettiva sono non vuoti.

Siccome $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
 $\parallel$
 $f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$

Inoltre $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) =$
 $= f^{-1}(Y) = X$

$\Rightarrow X$ è sconnesso. Assurdo.

Osservazione:

Alternativamente posso dimostrare la contronominale:

Se X è connesso e $|Y| > 1$ allora

Y non ha la topologia discreta.

(e) Vero. L'immagine tramite continua di un compatto è compatta.

$(X, \mathcal{C}_X)$ è compatto (ogni ricoprimento aperto è finito)

Se $f: X \rightarrow Y$ è continua e suriettiva

e X è compatto, allora $f(X) = Y$ è compatto.