Geometria e Algebra Appello del 27 gennaio 2020

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...) pena l'esclusione. Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`minimabasiA`] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ una lista di vettori di V. Cosa significa che questa lista è un sistema di generatori di V?

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`minimabasiB`] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ una lista di vettori di V. Cosa significa che questa lista è linearmente indipendente?

☐w ☐p ☐a ■c

....

....

....

....

....

....

....

Domanda [`minimabasiC`] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ una lista di vettori di V. Cosa significa che questa lista è una base di V?

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`minimabasiD`] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ una lista di vettori di V. Cosa significa che questa lista *non* è un sistema di generatori di V?

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openstatA`] Si enunci il teorema spettrale.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openstatB`] Si enunci il teorema di Rouché-Capelli. ☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openstatC`] Si enunci il teorema della base. ☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`openstatD`] Si enunci il teorema delle dimensioni (detto anche 'formula delle dimensioni'). ☐ w ☐ p ☐ a ■ c

Domanda [`invdiagA`] La matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ è

- ■ invertibile, ma non diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile e non diagonalizzabile.
- ☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.
- ☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagB`] La matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

☐ non invertibile e non diagonalizzabile.

■ non invertibile, ma diagonalizzabile.

☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagC`] La matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

☐ non invertibile e non diagonalizzabile.

☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.

■ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`invdiagD`] La matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

■ non invertibile e non diagonalizzabile.

☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.

☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [`morthogA`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$

Domanda [`morthogB`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Domanda [`morthogC`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

■ $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$

Domanda [`morthogD`] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

Domanda [`applineareA`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ L non è suriettiva.

■ $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$.

☐ $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

■ $\operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \subset \operatorname{Im} L$.

Domanda [`applineareB`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ $\dim \operatorname{Ker} L = 2$.

■ L non è iniettiva.

☐ $\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

■ $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

Domanda [`applineareC`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ $\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

■ L è iniettiva.

☐ $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

■ $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

Domanda [`applineareD`] ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

■ $\operatorname{Im} L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid y = 0\}$.

☐ L è suriettiva.

☐ $\dim \operatorname{Ker} L = 1$.

■ $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \notin \operatorname{Ker} L$.

Domanda [`vspacegrassA`] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 5

Domanda [`vspacegrassB`] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$; sapendo che $\dim U = 4$ e $\dim W = 3$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Domanda [`vspacegrassC`] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 ☐ 5

Domanda [`vspacegrassD`] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{11}$; sapendo che $\dim U = 6$ e $\dim W = 7$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 3 ■ 2 ☐ 4

Domanda [`roucheA`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare con A di ordine 4×3. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- [ ] Se $B = \mathbf{0}_4$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A.
- [ ] Se $\operatorname{rg} A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B.
- [x] Se $\operatorname{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema non è risolubile.
- [ ] Se $B \in \operatorname{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [`roucheB`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×4. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- [ ] Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_4$ è unica soluzione per ogni A.
- [ ] Se $\operatorname{rg} A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B.
- [x] Se $\operatorname{rg} A = 3$, allora il sistema è risolubile.
- [ ] Se $B \in \operatorname{Span}(A^1|A^2|A^3|A^4)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [`roucheC`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×3. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- [ ] Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A.
- [x] Se $\operatorname{rg} A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B.
- [ ] Se $\operatorname{rg}(A|B) = 3$, allora il sistema è risolubile.
- [ ] Se $B \in \operatorname{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [`roucheD`] Sia $A\,X = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×3. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- [ ] Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A.
- [ ] Per ogni B, se $\operatorname{rg}(A|B)$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica.
- [ ] Se $\operatorname{rg}(A) = 3$, allora il sistema ammette due soluzioni distinte.
- [x] Se $B \in \operatorname{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora esiste una soluzione.

Domanda [`matrixA`] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- [x] $\det A^{\mathrm{T}} = -2$.
- [x] $\det A^3 = -8$.
- [ ] $\det 2A = -4$.
- [ ] $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$.

Domanda [`matrixB`] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- [ ] $\det A^{\mathrm{T}} = 3$.
- [ ] $\det A^3 = -9$.
- [x] $\det 2A = -24$.
- [ ] $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$.

Domanda [`matrixC`] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- [x] $\det A^{\mathrm{T}} = -3$.
- [x] $\det(-A) = -3$.
- [ ] $\det 2A = -6$.
- [x] $\det A^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Domanda [`matrixD`] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- [ ] $\det A^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}$.
- [ ] $\det(-A) = 2$.
- [x] $\det 2A = -8$.
- [x] $\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$.