CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	28 nevoso CCXXVII RF ottidì
Cognome e Nome: Stoppino Lidia	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

(d) Determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che **non** sia simile ad A.

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. (8 pt) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + 2t = 0\}.$$

(a) Determinare la/le equazioni per V in forma cartesiana.

(b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U+V)$, e una loro base.

(c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

(d) Determinare una base ortogonale di U.

---

1) (a) Autovalori: $\{-3, -1, 1\}$ $m(-3) = \mu(-3) = 2$ $\mu(-1) = m(-1) = 1$ $m(1) = \mu(1) = 1$

q non è definita

(b) $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & +1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ Forma canonica: $q(x', y', z', t') = -3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 + t'^2$

(c) sì. Ad esempio $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ (d) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

2) (a) $rg(A_k) = \begin{cases} 3 & se\ k \neq 1, -2 \\ 2 & se\ k = 1, -2 \end{cases}$ | (b) Risolubile se e solo se $k \neq 1$

(c) $k \neq 1, -2$ (d) dim (soluzioni $A_0 \underline{x} = \underline{b}$) = 1

eq. parametriche: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\0\end{pmatrix}$

---

3) (a) $V: \begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

(b) $\dim U \cap V = 1$ $\dim(U+V) = 4$. Base per $U \cap V = \{\begin{pmatrix}-2\\4\\4\\1\end{pmatrix}\}$

Base per $U+V = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base canonica

(c) $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\}$

(d) $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\}$