Geometria e Algebra   Appello del 23 luglio 2019

□0 □0 □0 □0 □0 □0
□1 □1 □1 □1 □1 □1
□2 □2 □2 □2 □2 □2
□3 □3 □3 □3 □3 □3
□4 □4 □4 □4 □4 □4
□5 □5 □5 □5 □5 □5
□6 □6 □6 □6 □6 □6
□7 □7 □7 □7 □7 □7
□8 □8 □8 □8 □8 □8
□9 □9 □9 □9 □9 □9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:
Esempio di risoluzione

Domanda 1 Sia dato uno spazio vettoriale V. Come è definita la dimensione di V?

□w □p □a □c

La dimensione di uno spazio vettoriale è il numero di vettori che formano una base. Il teorema della base ci assicura che è una buona definizione: tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.

Domanda 2 Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dire se è definito il prodotto AB e in caso affermativo calcolarlo.

□w □p □a □c

In generale il prodotto tra 2 matrici $A_{m \times k}$ e $B_{m \times r}$ è definito se e solo se $k = m$, ed è una matrice $m \times r$. Si calcola in questo modo $AB = C = (c_{ij})$ $c_{ij} = A_i \cdot B^j$

In questo caso: $C = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Commenti sulle domande di teoria in un esempio del 23/07/19

Domanda 3

Domanda 3 Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** del piano π passante per i punti di coordinate $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

- [ ] $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+2t+2s \\ z = 1-2s \end{cases} \quad t,s \in \mathbb{R}$
- [ ] $\begin{cases} x-y=2 \\ z-y=2 \end{cases}$
- [x] $x+y+z=1$
- [ ] $x+y+z=0$

Chiediamo le equazioni CARTESIANE quindi Di certo non è la prima che è parametrica (anche se rappresenta il piano giusto):
La seconda NON rappresenta un piano ma una retta
Per vedere se è la terza o la quarta semplicemente verifico se le coordinate dei punti le soddisfano:

$$\begin{cases} 1-1+1=1 \\ -1+1+1=1 \\ 1+1-1=1 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$1-1+1 \neq 0$ la quarta no!

Domanda 4

ATTENZIONE possono esserci più risposte corrette! (in questo esempio vediamo che è solo una)

Domanda 4 (♣) Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente corrette?

- [ ] $U \subset V$.
- [ ] $U+V=\mathbb{R}^5$.
- [ ] $\dim(U \cap V) = 1$.
- [x] Se $\dim(U+V) = 5$ allora $\dim(U \cap V) = 0$.

OSS: So dal teorema di Grassmann che
$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$
ovviamente $U+V \subseteq \mathbb{R}^5$ dunque $\dim(U+V) \leq 5$
Dunque $5 \geq \dim(U+V) = 2+3+\dim(U \cap V)$
e se $\dim(U+V)=5$ ~~allora~~ $\dim(U\cap V)=0$. ovvero $(U \cap V) = \{0\}$
ovviamente non è detto che $U \subseteq V$: per esempio posso avere
$U = \text{span}\left(\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}\right)$ e $V = \text{span}\left(\underset{e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_5}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$ che hanno $U \cap V = \{0\}$
l'esempio appena fatto mostra che anche la seconda può essere falsa.
FALSA Basta prendere $U = \text{span}(e_1, e_2)$ $V = \text{span}(e_1, e_2, e_3)$

Domanda 5:

devo controllarle tutte perchè cene può essere più di una giusta (infatti in questo caso sono 2) ②

Domanda 5 (♣) Sia $A = (A^1|A^2|A^3)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- [x] $\det(A^2|A^1|A^3) = 2$.
- [ ] $\det(3A) = -6$.
- [x] $\det(A^1|A^1 + A^2|A^3) = -2$.
- [ ] $\det(A^1|A^2|2A^3) = -16$.

Qui dobbiamo sapere che il determinante è <u>lineare</u> sulle colonne: $\det(\lambda \underline{X} + \mu \underline{Y} | A^2 | \dots | A^n) = \lambda \det(\underline{X}|A^2|\dots|A^n) + \mu \det(\underline{Y}|A^2|\dots|A^n)$

(e lo stesso vale su tutte le colonne)

e che se <u>SCAMBIO</u> 2 colonne il determinante <u>cambia di segno</u>:

$$\det(A^1|A^2|A^3|\dots) = -\det(A^2|A^1|A^3|\dots)$$

Quindi se $A = (A^1|A^2|A^3)$ con $\det A = -2$

$$\det(A^2|A^1|A^3) = -\det A = 2$$

$$\det(A^1|A^1 + A^2|A^3) = \underbrace{\det(A^1|A^1|A^3)}_{0} + \det(A^1|A^2|A^3) = -2$$

perchè ho due colonne uguali

$$\det(3A) = \det(3A^1|3A^2|3A^3) = 3^3 \det A = 27 \cdot (-2) \neq -6$$

$$\det(A^1|A^2|2A^3) = 2\det(A^1|A^2|A^3) = -4 \neq -16$$

Domanda 6 ♣ Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z = x - t = 0 \}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Quali fra i seguenti vettori appartengono a $V^\perp$?

- [x] $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(oss: V è definito da 2 equazioni indipendenti in $\mathbb{R}^4$)
dunque ha dimensione 2 in $\mathbb{R}^4$

so che $V^\perp = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0 \ \forall \underline{y} \in V \}$

(cioè sono i vettori di $\mathbb{R}^4$ ortogonali a tutti i vettori di V)

e so che se $V = span(v_1, v_2)$

$V^\perp = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \langle \underline{x}, v_1 \rangle = \langle \underline{x}, v_2 \rangle = 0 \}$

trovo una base di V: $\begin{cases} x = -y - z \\ x = -t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -t \\ y = -x - z = t - z \end{cases}$ $\quad V = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

devo solo controllare i prodotti scalari ora

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ sì

$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \neq 0$ no

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ sì

$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \neq 0$ no

Domanda 7 Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, si dica quali delle seguenti affermazioni è vera:

- ☒ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
- ☐ $A^{-1} = A^T$
- ☐ La matrice A non possiede inversa.

osservo che $\det A = 2(4-3) = 2 \neq 0$ quindi A una inversa ce l'ha

osservo anche che $A^{-1} = A^T$ se e solo se le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

ma $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha norma $\sqrt{5} \neq 1$ no!

ora basta guardare che cosa succede facendo il prodotto tra quelle matrici ed A

$$(2,-3,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4-3 = 1 \quad \text{ops}$$

$$(2,-3,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6-6 = 0$$

$$(2,-3,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

questo ci dice che la prima riga della prima matrice funziona. invece di fare tutti i conti provo l'altro

proviamo l'altra

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(1+\frac{1}{3}+0\right) = \frac{4}{3} \neq 1$$

Domanda 8 ♣ Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- [x] Il vettore X_1 non appartiene a Ker A
- [ ] $2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$
- [x] Se rg $A < n$, allora è possibile che sia $X_1 \neq X_2$
- [x] $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $AX = 3B$

Sappiamo dunque che $AX_1 = B = AX_2$ e che $\boxed{B \neq \underline{0}}$

sappiamo anche che il sistema è risolubile (perché X_1 e X_2 sono soluzioni!) e dunque che $rg A = rg(A|B)$

vero

→ se $X_1 \in Ker A$ ho $AX_1 = \underline{0}$, ma sappiamo che $AX_1 = B \neq \underline{0}$

→ $2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = \underline{0}$?

se così fosse avrei $A(2X_1 - X_2) = \underline{0}$

ma d'altra parte per le proprietà del prodotto tra matrici

$$\underline{0} = A(2X_1 - X_2) \overset{\text{distributiva}}{=} 2AX_1 - AX_2 \overset{\text{per ipotesi}}{=}$$

$$= 2B - B = B$$

Dunque la condizione descritta implica $B = \underline{0}$

ma sappiamo che così non è.

→ se $rg A < n$ allora io so che (notate che siccome X_1 e X_2 sono soluzioni allora il sistema è risolubile!)

$\dim(\text{Soluzioni}) = n - rg(A)$

quindi è vero che se $\dim(Sol) > 0$ posso avere due soluzioni distinte (in effetti ne ho infinite)

→ $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $AX = 3B$?

Sì che $A(X_1 + 2X_2) \underset{\text{distr}}{=} AX_1 + 2AX_2 \underset{X_i \text{ soluzioni}}{=} B + 2B = 3B$ Allora è vero