ESERCIZIO 1

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS se $\underline{x}$ è autovettore per una matrice B con autovalore β, allora $\underline{x}$ è autovettore per $-B$ con autovalore $-\beta$

Dunque considero $B = -A$

Basta controllare $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori 3 e -1 con autovettori:

$$V_3 = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_{-1} = span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha autovalori 3 e $+1$

con $V_3 = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_{-1} = span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ok allora

Autovalori di B: $\boxed{3, 1, -1}$

autospazi:

$$V_3 = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_1 = span\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1} = span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $A = -B$ ho autovalori $\boxed{-3 \ -1 \ 1}$

con gli stessi autospazi

(a)

-3	$m_a = m_g = 2$
-1	$m_a = m_g = 1$
1	$m_a = m_g = 1$

q non è definita (ho autovalori pos e negativi)

(b) N ⇝ basta normalizzare i generatori degli autospazi

(oss: li devo normalizzare per ottenere la forma canonica!)

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

con questa matrice la forma canonica è

$$q(x', y', z', t') = -3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 + t'^2$$

(c) Facciamo una osservazione generale se ho una forma quadratica in forma canonica non definita

$$q(x_1, \dots x_n) = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \dots$$

con $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$

basta prendere (ad esempio) $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{-\alpha_2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

e $q(\underline{X}) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \dfrac{\alpha_1}{-\alpha_2} \neq 0 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$

Quindi in questo caso posso osservare che

$$q(\underbrace{(0,0,1,1)}_{}) = -1 + 1 = 0$$

$\underline{x}'$ nelle nuove coordinate $\underline{x}'$

dunque $q\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

controllo: $q(x,y,z,t) = -(x^2 + 4xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$

$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) = 0$ $\boxed{ok}$

(d) A è simile ad una matrice diagonale:

$\exists N$ (quella del punto (b))

tale che $N^{-1}AN = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

$\quad\quad\quad\quad\parallel$

$\quad\quad(N^T A N)$

Dunque se prendo una matrice B non diagonalizzabile ma con lo stesso polinomio caratteristico ho vinto, perché se B fosse simile ad A avrei $\exists M \in GL(4)$ tale che
$$\boxed{B = M^{-1} A M}$$

ma $A = N D N^T = N D N^{-1}$

dunque avrei
$$B = M^{-1} A M = M^{-1}(N D N^{-1}) M =$$
$$= (N^{-1}M)^{-1} D \, (N^{-1}M)$$

dunque B sarebbe simile ad una matrice diagonale: assurdo.

Considero ad esempio $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

che ha -3 con molt algebrica 2 come autovalore ma non è diagonalizzabile $\left(mg(-3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1 < ma(-3)$

Dunque la matrice $\boxed{B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ ha le proprietà che cerco.

ESERCIZIO 2

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}$$

(a) $\operatorname{rg} A_k = ?$ (Al variare di k)

Facciamo queste osservazioni:

→ $\operatorname{rg} A_k \leq 3$ perché ho 3 righe

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ è una sottomatrice quadrata con det $\neq 0$ di ordine 2

→ Dunque $\operatorname{rg} A_k \geq 2$

→ l'ultima colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -k-2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -k-1 \end{pmatrix}}_{\text{prima colonna}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{seconda colonna}}$$

Dunque posso eliminare la quarta riga per calcolare il rango

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ -2 & 1 & 1+k \\ -k-1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

sostituisco la seconda riga + terza riga

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ -k-3 & 0 & k-1 \\ -k-1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1-k \\ -k-3 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1) - (-k-3)(1-k) =$$

$$= k-1 - k^2 - 2k + 3 = -(k^2 + k - 2) =$$

$$= -(k-1)(k+2)$$

Per $k \neq 1, -2$ dunque ho $rg\, A_k = 3$
per $k = 1, -2$ so già che $rg\, A_k = 2$

Per sicurezza controllo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

dipendenti

e $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{OK}}$

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{1^a \text{ colonna}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underset{2^a \text{ colonna}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underset{4^a \text{ colonna}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$3 \underset{1^a \text{ colonna}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} + 5 \underset{2^a \text{ colonna}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underset{3^a \text{ colonne}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Ok}}$

(b) per quali valori di k $A_k \underline{x} = \underline{b}$ con

$\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ammette soluzioni?

Qui devo ricordare il teorema di

Rouché - Capelli:

$A_k \underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni se e solo se

$$rg(A_k | \underline{b}) = rg A_k$$

e quando ha soluzioni, le soluzioni sono una varietà lineare di dimensione

$$\# \text{variabili} - rg(A_k) = 4 - rg A_k$$

Ora, se $rg A_k = 3 = \#$ righe

allora $rg(A_k | \underline{b}) = 3$

quindi se $k \neq 1, -2$ il sistema è risolubile

per $k = 1, -2$ devo controllare direttamente.

Basta prendere le prime due colonne di A_k

controllare se $\underline{b}$ dipende da loro o no:

$$\underline{b} \overset{?}{\in} \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

vedo subito che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dunque $\underline{b} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \Rightarrow rg(A_1 | \underline{b}) = 3 > rg A_1$

non è risolubile

per $k=-2$

$$\underline{b} \overset{?}{\in} \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

vedo subito che $\underline{b} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}-1+0\\4-1\\-1-1\end{pmatrix}$$

Quindi il sistema ammette soluzioni se e solo se $k \neq 1$

(c) per quali k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1?

Come visto prima, per $k \neq 1$

dim spazio delle soluzioni $= 4 - rg A_k$

dunque questo numero è 1 se e solo se $rg A_k = 3$

Quindi la risposta è $\boxed{k \neq 1, -2}$

(d) sia $k=0$

La dimensione della varietà delle soluzioni sappiamo che deve essere 1 per l'esercizio precedente.

$$A_0 \underline{x} = \underline{b} \longrightarrow \begin{cases} x+z+t=-1 \\ -2x+y+z-t=3 \\ -x-y-2z-2t=-2 \end{cases}$$

uso l'eliminazione di Gauss sulle righe per ottenere un sistema equivalente più semplice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

3ª riga + 1ª riga al posto della terza

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ 2ª riga + 2(1ª riga)] al posto della seconda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ 3ª riga + 2ª riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

ottengo dunque
$$\begin{cases} x+z+t=-1 \\ y+3z+t=1 \\ 2z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-t-z-1=-t \\ y=-3z-t+1=3-t+1=4-t \\ z=-1 \end{cases}$$

equaz. parametrica: pongo $t=\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

controllo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia soluzione particolare

$$\begin{cases} 0+0-1+0=-1 \\ -2\cdot 0+4-1-0=3 \\ -0-4+2-0=-2 \end{cases} \quad \text{ok}$$

controllo che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ker A_0 \qquad \begin{cases} -1+0+1=0 \\ 2-1+0-1=0 \\ 1-(-1)-0-2=0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ok}}$

$$\ker A_0 = \begin{cases} x+z+t=0 \\ -2x+y+z-t=0 \\ -x-y-2z-2t=0 \end{cases}$$

(infatti Rouché-Capelli mi dice che

Soluzioni = soluzione particolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + ker A_0

ESERCIZIO 3

3) $V \subseteq \mathbb{R}^4$ sottospazio generato da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le equazioni per V in forma cartesiane

troviamo una base per V

$$v_4 = v_1 + v_2$$

dunque $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$

poi considero v_1, v_2, v_3

$$v_3 = -v_1 + 2v_2$$

dunque $V = \text{span}(v_1, v_2)$

v_1 e v_2 sono indipendenti, dunque formano una base di V

$$V = \{\alpha v_1 + \beta v_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha \\ z = -\alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ~~costanti~~ equazioni parametriche per V

Ricaviamo delle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = -y + 2t \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}}$$

(b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim U+V$

e una base per ciascuno spazio

Grassmann ci dice che abbiamo questa relazione.

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

$$\dim(U+V) = 3 + 2 - \dim(U \cap V)$$

Dunque $\dim(U \cap V) \geq 1$ e vale $\dim(U+V) = 4$ sse $\dim(U \cap V) = 1$

se $\dim(U \cap V) > 1$ allora è $= 2$

perché

$$\dim(U \cap V) \leq \min\{\underbrace{\dim U, \dim V}_{=2}\}$$

Dunque $\dim(U \cap V) = 1$

se e solo se $V \not\subseteq U$

ora $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ perché non soddisfa l'equazione cartesiana di U

$\Rightarrow \dim(U \cap V) = 1$ e $\dim(U+V) = 4$

Dunque $\dim(U+V) = 4 \Rightarrow U+V = \mathbb{R}^4$

• Cerchiamo un generatore di $U \cap V$

Metto a sistema le equazioni di U e di V cartesiane

$$\begin{cases} x+y-2t=0 \\ y-z=0 \\ x-y+z+2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2t=0 \\ y-z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t = x+y \\ y = z \\ x = -\frac{1}{2} z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2} z\right) = \frac{1}{4} z \\ y = z \\ x = -\frac{1}{2} z \end{cases}$$

$$U \cap V = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare una base di $V^\perp$

osservo che $V = \begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

<u>allora</u> se prendo i vettori dei coefficienti qui ottengo proprio una base di $V^\perp$!

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ base di $V^\perp$!

Infatti, in generale

se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ha <u>k equazioni</u>

allora i coefficienti delle k equazioni

sono una base per $V^\perp$!

(d) <u>Determinare una base ortogonale di U</u>

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; x - y + z + 2t = 0 \right\}$$

$x = y - z - 2t$

Base per U: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Costruiamo una base ortogonale

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1'$ poi tolgo a v_2 la proiezione ortogonale di v_2 su v_1

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 =$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = -1$
$\langle v_1, v_1 \rangle = 2$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

poi prendo $v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1' v_1' \rangle} v_1' - \dfrac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' =$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} v_1 - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} v_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 - 2 v_2' =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base ortogonale per U:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

posso anche prendere 2 questo vettore.