RISOLUZIONE TESTO 1 esercitazione 18 gennaio 2019

Commenti alle domande:

Domanda 1 chiedono una lista di 6 generatori distinti di $\mathbb{R}^3$.

Posso prendere la base canonica

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

così sono sicura che generano $\mathbb{R}^3$

e poi aggiungere altri 3 vettori a caso (purché distinti)

ad esempio $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Domanda 2

$A \in M_{\mathbb{R}}(3)$ matrice simmetrica.

So che per il teorema spettrale è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale.

Nel testo mi dicono che 3 e 7 sono gli unici autovalori di A e che

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = y+2z = 0 \right\}$$

che è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $\underline{3-2=1}$

A diagonalizzabile è equivalente a:

Gli autospazi (V_3 e V_7) sono in somma diretta e generano tutto $\mathbb{R}^3$

Quindi $\dim(V_3 \oplus V_7) = \dim V_3 + \dim V_7$

$$\underset{3}{\overset{\shortparallel}{\dim(V_3 \oplus V_7)}} = \dim V_3 + \dim V_7$$

Dunque, siccome $\dim V_3 = 1$ per ipotesi; allora $\boxed{\dim V_7 = 3 - 1 = 2}$

A simmetrica ci dice che gli autospazi sono <u>ortogonali tra loro</u>

Dunque poiché $V_3 \oplus V_7 = \mathbb{R}^3$

e V_7 è ortogonale a V_3,

abbiamo che $V_7 = (V_3)^{\perp}$

(V_7 è il complemento ortogonale di V_3)

una base del complemento ortogonale di V_3 la trovo considerando i vettori delle coordinate delle equazioni cartesiane di V_3:

$$\boxed{\mathcal{B}_{V_7} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

Domanda 3:

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare

So che $\ker L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x + 2y - z = x - y = 0}_{\text{2 equazioni indipendenti}} \right\}$

dunque

$$\dim(\ker L) = \dim \mathbb{R}^3 - 2 = 3 - 2 = 1$$

Ricordiamo che:

- L è iniettiva abbiamo dimostrato che è equivalente a $\ker L = \{\underline{0}\}$
- vale il teorema delle dimensioni

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{Im} L) =$$
$$= 1 + \dim(\operatorname{Im} L)$$

Dunque $\operatorname{Im} L$ ha dimensione 2 in $\mathbb{R}^2$

quindi $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$

Sappiamo quindi che L è suriettiva e

non è iniettiva

Questo risponde a tutte le domande.

Domanda 4:

Abbiamo verificato che una retta r è ortogonale al piano Π di equazione $\Pi: ax+by+cz+d=0$ se e solo se la direzione di r è parallela ad (a,b,c). In questo caso $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basta controllare le direzioni delle rette proposte.

Posso: 1) passare in forma parametrica:

$\begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO

$\begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}$ direzione: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ SÌ

$\begin{cases} x=y-z+3 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{cases} z=3 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no

$\begin{cases} y=2 \\ z=0 \end{cases}$ direzione: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no

---

Alternativamente posso osservare che le rette parallele a quelle date passanti per $\underline{0}$ sono quelle ottenute considerando le equazioni senza termini noti:

$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

e posso semplicemente controllare se $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è soluzione dei sistemi.

Domando 5

Qui dobbiamo solo ricordare la formula di Grassmann

$$\boxed{\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V)}$$

Dunque se siamo in $\mathbb{R}^5$ so che

$$\dim(U+V) \leq 5 \quad \text{e vale} = 5 \text{ se e solo se } U+V=\mathbb{R}^5$$

Questo mi dice che

$$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) =$$
$$= 2+4-\dim(U+V) \geq 6-5 = 1$$

Quindi so che certamente $\dim(U\cap V) \geq 1$

So anche che

$$U \subseteq U+V \implies \overset{2}{\overset{\shortparallel}{\dim U}} \leq \dim(U+V)$$
$$V \subseteq U+V \implies \underset{4}{\underset{\shortparallel}{\dim V}} \leq \dim(U+V)$$

Guardo le opzioni:

→ non è detto che $\dim(U\cap V)=2$ infatti

può essere che $\dim(U\cap V)=1$

(che è equivalente a $\dim(U+V)=5$ cioè $U+V=\mathbb{R}^5$

prendo per esempio $\mathrm{span}\left(\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}\right) = U$

$\mathrm{span}(e_2, e_3, e_4, e_5) = V$)

6

→ A maggior ragione non è certo detto che $\dim(U\cap V) \geq 3$!

→ $\dim(U+V) \geq 4$ vero, l'abbiamo appena osservato.

→ U e V <u>non</u> sono in somma diretta se e solo se

$$U\cap V \neq \{\underline{0}\}$$

ma questo è equivalente a chiedere che $\dim(U\cap V) > 0$ cioè $\underline{\dim(U\cap V) \geq 1}$

che è proprio la disuguaglianza che ci dà Grassmann.

Domanda 6:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

u è tale che $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Significa che

$$u = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$ quindi queste sono le coordinate di u nella base canonica di $\mathbb{R}^3$

Guardo le ~~afferme~~ azioni proposte:

→ ovviamente è possibile determinare u (l'abbiamo appena fatto!)

→ $u \overset{?}{\in} \text{span}(v_1, v_2)$?

$u = av_1 + bv_2$?

so che $u = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3$

e so che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è base per $\mathbb{R}^3$

dunque questa scrittura è unica

quindi non è possibile che $u = av_1 + bv_2$ per certi $a, b \in \mathbb{R}$

(in altre parole, se $u = av_1 + bv_2$ allora u avrebbe due scritture distinte come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3)

→ Osserviamo che se $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$ (come verificato sopra)

non può essere $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (stessa osservazione di prima)

Domanda 7:

Quali sono forme quadratiche definite positive?

$\rightarrow$ $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy = (x+2y)^2$

vedo subito che è semidefinita positiva, non definita positiva: ad esempio se prendo $(2,-1)$

$q(2,-1) = 0$

$\rightarrow$ $q(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy$

Ricordiamo in generale che se prendo una forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ associata a matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ vale che è def. positiva se

$$\det A = ac - b^2 > 0 \quad e \quad tr A = a + c > 0$$

(poichè queste condizioni sono equivalenti a che gli autovalori siano strettamente positivi)

Quindi $q \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = 1 - 4 < 0$ no

$\rightarrow$ $q(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 4 - 1 > 3$ $tr = 4 > 0$ sì

$\rightarrow$ $q(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 10xy$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\det = 16 - 25 < 0$ no

Domanda 8 $\quad A = (A^1|A^2|A^3) \in M_{\mathbb{R}}(3)$

Ricordiamo:

- $\det A = 0$ equivale a $\{A^1, A^2, A^3\}$ linearmente dipendenti
- il determinante è lineare sulle colonne

Dunque

→ $\det(A^1, -A^2, 2A^3) = -\det(A^1, A^2, 2A^3) = -2\det(A^1|A^2|A^3) = 0$;

→ $\text{span}(A^1, A^2, A^3) = \text{span}(A^1+A^2, A^2, A^3)$

dunque anche $\{A^1+A^2, A^2, A^3\}$ sono dipendenti;

→ A^1, A^2, A^3 sono dipendenti;

→ $$\det(A^1+A^2|A^2|A^3) = \det(A^1|A^2|A^3) + \underbrace{\det(A^2|A^2|A^3)}_{\substack{\text{det di matrice con} \\ \text{2 colonne uguali è zero}}} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$