CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 luglio 2019
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3+k & k & 4 & -3-k \\ k-1 & -3k & 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k \\ 4+k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
3/2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 3/2 \\ 2 \text{ se } k = 0, 3/2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 3/2$,

dim Sol $= 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

(a) $P_A(t) = -t(1+t)^2 = -t^3 - 2t^2 - t$

(b) Autovalori di A: 0 con $\mu = m = 1$, -1 con $\mu = m = 2$.

(c) $V_0(A) = \{x - z = y - 3x = 0\} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $V_{-1}(A) = \{x - y + 3z = 0\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(d) Sì A è diagonalizzabile: $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per O. $\pi\colon x + 2y + z = 0.$

(c) Calcolare la proiezione ortogonale di P_0 su π, e la proiezione ortogonale di P_1 su π. $P_0' = P_1' = \pi \cap r = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Commenti sulla soluzione del compito del 23 luglio 2019

ESERCIZI versione A

1)(a) osserviamo che $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3+k & k & 4 & -3-k \\ k-1 & -3k & 2k-1 & 1-k \end{pmatrix}$ è una matrice con 3 righe e 4 colonne (3×4) dunque $rg\, A_k \leq 3$

osserviamo che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 4 \end{pmatrix}$ ha determinante k dunque di certo $rg\, A_k \geq 2$ per $k \neq 0$; però anche per $k=0$ abbiamo

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ che è una sottomatrice di rango 2 dunque $\underline{rg\, A_k \geq 2} \quad \forall k$

Dobbiamo solo capire quando è 2 e quando è 3.

Consideriamo la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3+k & k & 4 \\ k-1 & -3k & 2k-1 \end{pmatrix} =: B_k \qquad \det B_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{k-1 \quad k \quad 0} \\ \boxed{-k, \ -3k \quad 0} \end{pmatrix} = (*)$$

2ª riga − 4 1ª riga

3ª riga − (2k−1) 2ª riga

$$(k-1-2k+1, \ -3k-0, \ 2k-1-(2k-1))$$

$$\| $$

$$(-k, \ -3k, \ 0)$$

$$\|$$

$$k(-1, -3, 0)$$

$$(*) \underset{\substack{\text{linearità del}\\ \text{determinante}\\ \text{sulle righe}}}{=} k \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k-1 & k & 0 \\ -1, & -3, & 0 \end{pmatrix} = k \begin{vmatrix} k-1 & k \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = k(-3k+3+k)$$

$$= -k(2k-3)$$

dunque per $k \neq 0$ e per $k \neq 3/2$
$\det A_k = 3$

Controlliamo i casi particolari $k=0$ e $k=3/2$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è evidente che $\operatorname{rg} A_0 = 2$

$$A_{3/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 9/2 & 3/2 & 4 & -9/2 \\ 1/2 & -9/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

in questo caso vedo subito che $\operatorname{rg} A_{3/2} = 2$

Dunque

$$\operatorname{rg} A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 3/2 \\ 2 & \text{se } k = 0, 3/2 \end{cases}$$

infatti

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 3^a \text{ riga}}}{(A_{3/2})_3} = -3 \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \text{ riga}}}{(A_{3/2})_2} + 14 \underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ riga}}}{(A_{3/2})_1}$$

$$\begin{cases} 2 = -12 + 14 \\ \frac{+27}{2} - 14 = -\frac{1}{2} \\ -9/2 = -3 \cdot \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} = -27 + 14 \end{cases}$$

OK

(b) Per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzioni?

Sappiamo dal teorema di Rouché-Capelli che il sistema $A_k \underline{x} = \underline{b}_k$ ammette soluzioni se e solo se

$$rg(A_k) = rg(A_k | \underline{b}_k)$$

se $rg\, A_k = 3$ allora $rg(A_k | \underline{b}_k) = 3$ (ovviamente)

Quindi dobbiamo solo controllare i casi $k = 0, 3/2$

per $k = 0$

$$\underline{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (A_0)^3 \rightarrow \text{la } 3^a \text{ riga di } A_0$$

Chiaramente $rg(A_0 | \underline{b}_0) = 2$

Quindi per $k=0$ il sistema è risolubile.

Per $k = 3/2$

Ricordiamo che

$$(A_{3/2})_3 + 3(A_{3/2})_2 - 14(A_{3/2})_1 = \underline{0}$$

Quindi per verificare il rango di $(A_{3/2} | \underline{b}_{3/2})$ devo vedere se vale che

$$b_3 + 3b_2 - 14b_1 = 0 \qquad \underline{b}_{3/2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}_{3/2} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 4/2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad -1 + 3\frac{3}{2} - 14 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \neq 0$$

Quindi $rg(A_{3/2} | \underline{b}_{3/2}) = 3$ in questo caso il sistema non è risolubile!

Riassumendo: il sistema è risolubile se e solo se $k \neq 3/2$

(c) Sempre Rouché Capelli ci dice che se il sistema è risolubile la dimensione delle soluzioni è $\#(\text{variabili}) - rg(A_k)$

Quindi per $k \neq 3/2$ abbiamo dimensione delle soluzioni $= 4 - rg A_k$

Dunque $\dim(\text{soluzioni}) = \begin{cases} 4-3 = 1 & \text{se } k \neq 0, 3/2 \\ 4-2 = 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}$

(d) Sia $k=1$ (so che il sistema è risolubile e che lo spazio delle soluzioni è una varietà lineare di dimensione 1: una retta)

equazioni:

$$\begin{cases} x + z - t = 2 \\ 4x + y + 4z - 6t = 5 \\ -3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Usiamo la riduzione di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow 2^a \text{ riga} - 4\ 1^a \text{ riga}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-9 = -10 \end{array}\right)$$

$\to$ 3ª riga + 3 2ª riga

$$\begin{cases} x + z - t = 2 \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{4}t - \frac{10}{4}$$

$$\begin{cases} x = 12 + t \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases}$$

dunque

equazioni parametriche:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}}$$

<u>check</u>: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deve essere il generatore di ker A

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ 4x + y + 4z - 4t = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$$

✓ controllo che soddisfi le equazioni

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $$p_A(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 3 \\ 3 & -4-t & 9 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 3 \\ 3+3t & -1-t & 0 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

2ª riga:

$$(t+1)(3, -1, 0)$$

$$\underset{\substack{\text{linearità sulle} \\ \text{righe del} \\ \text{determinante}}}{=} (t+1) \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (t+1)\left(3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (2-t) \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (t+1)\left(-9+3 + (2-t)(t+3)\right) =$$

$$= (t+1)\left(-6+6-t^2-t\right) =$$

$$= (t+1)(-t^2+t) = -(t+1)(+t+1)t =$$

$$= -t(t+1)^2$$

(b) Gli autovalori sono le radici di $p_A(t)$ ⑦

dunque sono -1 e 0

le molteplicità algebriche sono le molteplicità degli autovalori come radici del polinomio caratteristico

$m(-1) = 2 \qquad m(0) = 1$

le molteplicità geometriche sono le dimensioni degli autospazi:

$$\mu(-1) = \dim(\ker(A+I)) = \ker\begin{pmatrix} +1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$rg(A-I) = 1$ quindi $\dim \ker(A-I) = 3-1$ (per il teorema della dimensione)

$\mu(1) = 2$

$\mu(0) = \dim(\ker A)$

ma sappiamo che $\mu(0) \geq 1$ e

$\mu(0) \leq m(0) = 1$

Quindi $\mu(0) = 1$

(poiché $\mu(0) + \mu(-1) = 3$ allora A è diagonalizzabile!)

(c) $$V_0(A) = \begin{cases} -y + 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$ (so che devo prendere 2 righe, e scelgo quelle più comode)

$$= \begin{cases} -y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2ª riga − 1ª riga

$$V_{-1}(A) = \begin{cases} x - y + 3z = 0 \end{cases}$$ 1 equazione (!)

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(d) A come osservato è diagonalizzabile, e vale che $N^{-1} A N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dove N ha come colonne una base di autovettori di A (rispetto a -1 e poi a 0 se la voglio di quella forma)

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$