ESERCIZI 8

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

1. Dimostrare che $\mathbb{R}^3$ meno un numero finito di punti è semplicemente connesso.
2. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$, dove r è una retta.
3. Supponendo noto il gruppo fondamentale del bouquet di n circonferenze B_n, calcolare:
   (a) il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{r \cup s\}$, dove r, s sono due rette di $\mathbb{R}^3$ (attenzione alle possibili posizioni reciproche di r ed s);
   (b) il gruppo fondamentale di $S^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, dove i $p_i \in S^2$ sono $k \geq 1$ punti distinti;
   (c) il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{r_1 \cup \ldots \cup r_k\}$, dove le r_i sono k rette distinte passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$.
4. Calcolare il gruppo fondamentale dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$ così definiti:
   (a) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$: $X = S^2 \cup \{x = 0\}$.
   (b) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine:
   $$Y = X \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$
   (c) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine e $(0, 1/2, 0)$:
   $$Z = X \setminus \{(0, 0, 0), (0, 1/2, 0)\}.$$
   (d) Unione della sfera S^2 e di $\{x = 0\}$ meno l'origine e il polo nord $(1, 0, 0)$:
   $$Z = X \setminus \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}.$$
   (e) Unione della sfera S^2 e di due piani coordinati:
   $$Y = S^2 \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}.$$

5. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus W$, dove W è un sottospazio vettoriale di dimensione k. [sugg: usare l'Esercizio 13 del Foglio 7].

6. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti sottospazio di $\mathbb{R}^3$:
$$X = \{x^2 + y^2 = z^2\};$$
$$Y = X \cup \{z^2 = 1\};$$
$$Z = X \cap \{z^2 \leq 1\}.$$

7. Calcolare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $X = C_1 \cup C_2 \cup \{y - 1 = z = 0\}$, dove
$$C_1 : (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

8. Calcolare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, dove
$$C_1 : (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$C_3 : x^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 1.$$

9. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

10. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}(\mathbb{P})^n$ [sugg: usare gli stessi ragionamenti sviluppati per $n = 2$ nell'ultima lezione].