ESERCIZI 6

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2017/18

1. Siano $A, B$ due aperti di uno spazio topologico. Dimostrare che se $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi per archi, allora $A$ e $B$ sono connessi per archi.
2. Dimostrare che un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.
3. Dimostrare che il prodotto di spazi contraibili è contraibile.
4. Dimostrare che la mappa antipodale $\underline{x} \mapsto -\underline{x}$ da $S^n$ in sè è omotopa all'identità se $n$ è dispari. (sugg. se $n = 2k-1$ allora $S^n \subseteq \mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$).
5. Dimostrare che ogni spazio topologico ha qualunque suo punto come retratto.
6. Se $Y \subseteq X$ è retratto di deformazione di $X$ e $Z \subseteq Y$ è retratto di deformazione di $Y$, allora $Z$ è retratto di deformazione di $X$.
7. Dimostrare che una corona circolare si retrae forte di deformazione su uno dei suoi bordi.
8. Mostrare che il bicchiere vuoto è un retratto di deformazione forte del bicchiere pieno. Più precisamente, mostrare che $Y = D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto forte di deformazione di $X = D^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.
9. Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente a uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è anch'esso connesso (risp. connesso per archi).
10. Verificare che $\mathbb{R}^2$ meno due punti si retrae forte di deformazione sulla figura a otto.
11. Dimostrare che un triangolo pieno in $\mathbb{R}^2$ si retrae forte di deformazione su due suoi lati.
12. Dimostrare che in uno spazio $T2$ ogni retratto è chiuso.
13. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale di dimensione $m$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{\underline{0}\}$.

14. Si prenda l'insieme $X$ dei punti delle rette passanti per l'origine con pendenza razionale in $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia indotta da quella euclidea:

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dimostrare che

(a) $X$ è connesso per archi ma non è localmente connesso per archi. (*localmente connesso per archi: ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi*).

(b) Il punto $(0, 0)$ è un retratto forte di deformazione di $X$ (e in particolare $X$ è contraibile).

(c) Ogni punto di $X$ diverso da $(0, 0)$ è un suo retratto ma non un retratto di deformazione.

15. Fare un esempio di un retratto di deformazione che non è un retratto forte di deformazione.

16. Fare un esempio di un retratto debole di deformazione che non è un retratto di deformazione.

17. Fare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico che è un retratto debole ma non un retratto.

18. Dati due archi $\alpha$ e $\beta$ tra $x$ e $y$ in uno spazio topologico $X$ dimostrare che $\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha \star \overline{\beta} \sim \epsilon_x$.

19. Dimostrare che se $\pi_1(S^1)$ fosse banale, allora per ogni spazio topologico $X$, per ogni $x_0 \in X$ avremmo che $\pi_1(X, x_0)$ sarebbe banale.

20. Dimostrare che dati due spazi topologici $X$ e $Y$, e dati due punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ vale che $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

21. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, calcolare il gruppo fondamentale del toro.

22. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, calcolare il gruppo fondamentale della striscia di Möbius (sugg. vedere che ha $S^1$ come retratto forte di deformazione e usare che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$).

23. Dimostrare che se $Y \subseteq X$ è un retratto di uno spazio topologico $X$, dimostrare le seguenti affermazioni:

    (a) Per ogni $y \in Y$ l'applicazione indotta dall'inclusione $i\colon Y \hookrightarrow X$ sui gruppi fondamentali
    $$i_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$$
    è iniettiva.

    (b) Per ogni $y \in Y$ l'applicazione indotta dalla retrazione sui gruppi fondamentali
    $$i_*\colon \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$
    è suriettiva.

24. Con le ipotesi e notazioni dell'Esercizio 23, supponiamo che $i_*\pi_1(Y, y)$ sia un sottogruppo normale di $\pi_1(X, y)$. Dimostrare che $\pi_1(X, y)$ allora è il prodotto diretto dei sottogruppi $i_*\pi_1(Y, y)$ e $\ker r_*$.

25. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, dimostrare che la circonferenza $S^1$ non è un retratto del disco $D^2$ (sugg. usare l'Esercizio 23).

26. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, dire se il gruppo fondamentale della figura a otto è banale o no. (sugg. usare l'Esercizio 23).

27. Dimostrare che se $Y$ è retratto forte di deformazione di $X$, allora per ogni $y \in Y$, $i_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$ è un isomorfismo.

28. Dimostrare che se $\varphi\colon X \to X$ è un'applicazione continua omotopa ad $id_X$, allora per ogni $x_0 \in X$ l'omomorfismo indotto $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo.