ESERCIZI 6

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

1. (Manetti 6.4) Provare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Trovare un esempio di spazio separabile e di un suo sottospazio non separabile (sugg: pensare alla retta di Sorgenfrey per se stessa).

2. (Manetti 6.3) Sia $f: X \to Y$ continua e suriettiva. Provare che se X è separabile allora anche Y è separabile. Se in aggiunta f è aperta e X ha una base numerabile, allora anche Y ha una base numerabile.

3. (Manetti 6.5) Siano X, Y due spazi topologici e sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva tale che $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$. Si dimostri che se X è a base numerabile, allora anche Y è a base numerabile.

4. Si consideri la seguente topologia su $\mathbb{R}$: $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ (ref. Foglio 4).
   (a) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è primo-numerabile.
   (b) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è secondo-numerabile.
   (c) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è separabile.

5. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Uno spazio metrizzabile è separabile;
   (b) Uno spazio separabile è metrizzabile;
   (c) Uno spazio metrizzabile è primo-numerabile;
   (d) Uno spazio primo-numerabile è metrizzabile.

6. Siano $(X, \mathcal{S})$ e $(Y, \mathcal{T})$ spazi topologici con $(X, \mathcal{S})$ primo numerabile e sia $f: X \to Y$. Allora f è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$. (si ragiona come negli spazi metrici: sia $\{B_n\}$ una base locale numerabile in x_0 tale che $B_n \subseteq B_{n'}$ se $n \leq n'$. Si supponga che f non sia continua in x_0 e si costruisca una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \to x_0$ ma $f(x_n)$ non tenda a $f(x_0)$.)

7. Sia X lo spazio delle funzioni $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Per ogni $f_0 \in X$ consideriamo gli insiemi della forma $\mathcal{U}(f_0; x_1, x_2, \dots x_n, \epsilon) = \{f \in X : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon\}$. Dimostrare che questi insiemi, al variare di $f_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ e di $x_i \in [0,1]$ formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X che viene detta "topologia della convergenza puntuale" (vedi punto seguente).

   (b) Dimostrare che una successione $\{f_k\}$ converge a f rispetto a $\mathcal{T}$ se e solo se per ogni $x \in [0,1]$ $f_k(x) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$ per $k \to +\infty$.

   (c) Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ non è primo numerabile.

   (d) Sia E il sottoinsieme delle funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi finiti di $[0,1]$. Quindi $f \in E$ se e solo se f è zero dappertutto eccetto in un numero finito di punti dove vale 1. Dimostrare che $f_0(x) = 1$ per ogni x appartiene alla chiusura di E.

   (e) Dimostrare che non esiste nessuna successione in E che converge a f_0.

8. Sia $\mathcal{K}$ la topologia cofinita su un insieme X.

   (a) Si dimostri che per ogni $x \in X$ vale che $\cap\{A \mid x \in A \in \mathcal{K}\} = \{x\}$;

   (b) se $\mathcal{N}$ è un sistema fondamentale di intorni di x allora $\cap\{N, N \in \mathcal{N}\} = \{x\}$;

   (c) se X non è numerabile come insieme, allora $(X, \mathcal{K})$ non è primo-numerabile.

9. (Manetti 6.8) Siano X e Y spazi primo-numerabili e di Hausdorff. Dimostrare che un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.

10. (a) Dimostrare che X è T3 se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno V di x esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

    (b) Dimostrare che X è T4 se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni aperto V tale che $C \subseteq V$ esiste un aperto U tale che $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

11. Dimostrare che se X è uno spazio T3 allora ogni sottospazio di Xè T3.

12. Dimostrare che se X e Y sono entrambi T3 allora $X \times Y$ è T3.

13. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ costituita da gli intervalli aperti (a,b) con $a < b$ in $\mathbb{R}$ e dagli insiemi della forma $(a,b) \cap \mathbb{Q}$.

    (a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ che è strettamente più fine della topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Q}$ è aperto in $\mathcal{T}$, e che l'insieme $F := \{x = \sqrt{2}/n, n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso per $\mathcal{T}$.

(c) Dimostrare che per ogni $B \in \mathcal{B}$ tale che $0 \in B$ si ha $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$.

(d) Concludere che $(X, \mathcal{T})$ non è T3. Quindi una topologia più fine di una topologia T3 può non essere T3.

14. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $F \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che la contrazione a un punto di F X/F è T1. Se inoltre X è T3 allora X/F è T2.

15. Dimostrare che il prodotto arbitrario di spazi topologici Tj con $j = 0, 1, 2, 3$ è Tj.

16. Sia X uno spazio topologico T1: Dimostrare che sono equivalenti:

    (a) Ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione;

    (b) Ogni successione $\{x_n\}$ in X ha almeno un punto di accumulazione.