ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

1. Sia X uno spazio topologico, sia Y un insieme. Sia $f: X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Sia $\mathcal{T}_f$ la topologia quoziente su Y. Dimostrare che $C \subseteq Y$ è chiuso per $\mathcal{T}_f$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

2. Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ mappe quozienti. Allora la composizione $g \circ f$ è una mappa quoziente.

3. (Munkres Ch.2, sec.22: esistono applicazioni quoziente aperte e non chiuse, chiuse e non aperte e nè aperte nè chiuse).

   (a) Siano $X := [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$, $Y := [0,2] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea $\mathcal{T}_e$. Definiamo un'applicazione $p: X \to Y$:

   $$p(x) := \begin{cases} x \text{ se } x \in [0,1] \\ x-1 \text{ se } x \in [2,3] \end{cases}$$

   Verificare che p è continua chiusa e suriettiva (dunque è un'identificazione chiusa) ma non aperta.

   (b) Sia $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore (con topologia euclidea). Verificare che p è un'identificazione aperta ma non chiusa.

   (c) Sia $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il sottospazio

   $$A := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ oppure } y = 0 \text{ o entrambi}\}.$$

   Dimostrare che $p_{|A}: A \to \mathbb{R}$ è una mappa quoziente (un'identificazione) che non è nè aperta nè chiusa.

4. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

5. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = R \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

   $$(x,a) \sim (y,b) \text{ se } (x,a) = (y,b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

   Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

6. (Manetti 5.9) Mostrare che, al variare di A tra i sottoinsiemi di $[0,1]$ formati da due punti distinti, lo spazio quoziente $[0,1]/A$ può assumere tre diverse classi di omeomorfismo.

7. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico $X \longrightarrow X/S$ è chiusa/aperta se S è chiuso/aperto in X. Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).

8. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso unitario e $S^1 \subset D$ la circonferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio D/S^1 in cui S^1 è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera S^2.

9. Uno spazio si dice *normale* se i punti sono chiusi (è T1) e dati due qualunque chiusi disgiunti $C, D \subset X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tali che $C \subseteq \mathcal{U}, D \subseteq \mathcal{V}$.

   (a) Dimostrare che uno spazio compatto e T2 è normale;

   (b) Sia X uno spazio normale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente X/C è normale.

10. Si dotino $[-1, 1]$ e $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1, 1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi \colon X \longrightarrow X/Y$ la contrazione di Y ad un punto. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.

    (a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?

    (b) Lo spazio X/Y è normale?

    (c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?

    (d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?

    (e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.

11. Sia T il toro ottenuto come identificazione di figura piana $Q/\sim$ dove $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $\{x, x'\} = \{\pm 1\}$ e $y = y'$, oppure $\{y, y'\} = \{\pm 1\}$ e $x = x'$. Dimostrare che $T \sim S^1 \times S^1$.

12. (a) Sia $p \colon X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva. Supponiamo che esista $f \colon Y \to X$ continua tale che $g \circ f = id_Y$. Dimostrare che allora f è una mappa quoziente.

    (b) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un suo sottospazio. Supponiamo che esista $r \colon X \to Y$ tale che, denotando con $i \colon Y \to X$ l'inclusione, $r \circ i = id_Y$ (tale r si chiama retrazione e si dice che Y è un retratto di X). Dimostrare che allora r è una mappa quoziente.

    (c) Dimostrare che ogni retratto in uno spazio T2 è chiuso.

13. Classificare a meno di omeomorfismo i seguenti spazi topologici.

    (a) $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea;

(b) $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey (ricordiamo che una base per la topologia sono gli intervalli della forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$);

(c) $\mathbb{R}^2$ con la topologia eucludea;

(d) Lo spazio quoziente $X = \mathbb{R}/\sim$ dove su $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea considero la relazione di equivalenza $x \sim y$ se se solo se $x = y$ oppure $x, y \in [1, 2]$;

(e) Lo spazio quoziente $Y = \mathbb{R}/\sim$ dove su $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea considero la relazione di equivalenza $x \sim y$ se se solo se $x = y$ oppure $x, y \in (1, 2]$;

14. Sia $X = \{2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi
$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

   (a) Dimostrare che gli U_n, al variare di $n \in X$ formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X.

   (b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T0?

   (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

   (d) Consideriamo la relazione di equivalenza su X
$$n \sim m \iff 2 \mid (n - m).$$
   Descrivere lo spazio quoziente $X/\sim$ (ovviamente considerando la topologia $\mathcal{T}$ su X).

15. (Manetti, 5.12): esempio di identificazioni il cui prodotto non è una identificazione.

   Sia $f\colon \mathbb{R} \to X$ una identificazione tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni $x + y = n + \sqrt{2}/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

   (a) f è una identificazione chiusa;

   (b) C è chiuso ed è saturo rispetto a $f \times Id\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to X \times \mathbb{Q}$.

   (c) $(f \times Id)(C)$ non è chiuso nella topologia prodotto;

   (d) $f \times Id$ non è una identificazione.

16. (Manetti 5.18 e 5.19) Dimostrare che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo a S^1 e che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo a S^2.

17. Una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un'applicazione $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ indotta per passaggio al quoziente da un'applicazione lineare iniettiva $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostrare che le proiettività sono omeomorfismi.