ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

1. (Kosniowski Teorema 9.6) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che $\cap_\alpha Z_\alpha \neq \emptyset$, allora $W := Y \cup (\cup_\alpha Z_\alpha)$ è connesso.

2. (Kosniowski 9.8 (f), Manetti 4.12) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che esiste $\overline{\alpha}$ tale che $Z_{\overline{\alpha}} \cap Z_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$, allora $W := \cup_\alpha Z_\alpha$ è connesso.

3. (Manetti 4.14) Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $A := \cup_n A_n$ è connesso.

4. (Manetti 4.13) Dimostrare che i due sottospazi di $\mathbb{R}^2$:
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\},$$
non sono omeomorfi.

5. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea).
   (a) una retta;
   (b) l'unione di due rette;
   (c) $\{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$;
   (d) $\{(x, y) \mid xy = 1\}$.

6. (Kosniowski 9.8 (e)) Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in $\mathbb{Z}$ è costante. Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in uno spazio discreto è costante.

7. Uno spazio topologico si dice *totalmente sconnesso* se presi comunque due punti $x, y \in X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ e $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Ovviamente uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.

   (a) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.

   (b) L'insieme dei razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è totalmente sconnesso?

   (c) Si dimostri che la retta di Sorgenfry $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è totalmente sconnessa.

   (d) Si dimostri che le componenti connesse di uno spazio topologico X totalmente sconnesso sono i sottoinsiemi costituiti da un solo punto.

8. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

   (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (con la topologia concreta) è compatto;

   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (con la topologia discreta) è compatto;

   (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (con la topologia euclidea) è compatto;

   (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey) è compatto.

   Discutere le stesse affermazioni con il sottospazio $[0, 1]$ ed il sottospazio $[0, 1)$.

9. (4.24 Manetti) Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.

10. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme

$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

   (a) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?

   (b) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

   Stesse domande con $Y := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}$.

11. Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici, con Y compatto e di Hausdorff. Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico Γ_f è chiuso nel prodotto $X \times Y$.

12. Si consideri la seguente famiglia su $\mathbb{R}$: $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

    (a) Si verifichi che è una topologia su $\mathbb{R}$.

    (b) Si stabilisca se è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$.

    (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto?

    (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso?

13. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia della continuità superiore $\mathcal{T}_+$, i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti rispetto a $\mathcal{T}_+$:

$$A = (0,1),\ B = [0,1),\ C = (0,+\infty),\ D = [0,+\infty),\ E = (-\infty,1),\ F = (-\infty,1].$$

14. (Munkres 3.29.5). Siano X e Y due spazi topologici tali che valga che ogni punto possiede un intorno compatto. Se $\varphi\colon X \to Y$ è un omeomorfismo tra X e Y dimostrare che f estende ad un omeomorfismo delle compattificazioni di Alexandroff $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$.

15. (Munkres 3.29.8). Dimostrare che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z}_{>0}$ è omeomorfo al sottospazio di $\mathbb{R}$:

$$\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$