ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2018/19

1. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

2. (Manetti 3.49) Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo
$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W$$
$$(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z)).$$
   (a) Provare che se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.
   (b) Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.
   (c) Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.

3. (Manetti 3.51) Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

4. Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su Y.

5. Sia $F \subseteq \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme (che dotiamo della topologia di sottospazio indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^3$. Sia $R_F \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio che ottengo ruotando F intorno all'asse z; dimostrare che R_F è omeomorfo a $F \times S^1$.

6. Indichiamo con $\mathbb{R}_S$ la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.
   (a) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x + y = 0\}$ è discreto.
   (b) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x - y = 0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}_S$.
   (c) Considerando in generale una retta r passante per l'origine, stabilire quando (a seconda della pendenza) r con la topologia indotta è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ e quando è omeomorfo ad $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.

7. Siano X e Y spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua suriettiva. Poniamo
$$R = \{(x, x') \mid f(x) = f(x')\} \subseteq X \times X.$$
   (a) Dimostrare che se Y è di Hausdorff R è un chiuso in $X \times X$.

(b) Dare un esempio in cui R è un chiuso ma Y non è di Hausdorff.

(c) Mostrare che se R è chiuso in $X \times X$ e f è aperta allora Y è di Hausdorff.

8. (a) Dimostrare che un sottospazio di uno spazio Ti è Ti per $i = 0, 1, 2, 3$.

   (b) Dimostrare che un sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale.

   (c) Dimostrare che lo stesso non vale per la proprietà T4 (sugg. provare a prendere topologie opportune su insiemi finiti).

9. Dimostrare che uno spazio topologico X con un numero finito di elementi che sia T1 ha la topologia discreta. Pertanto è T2, T3, T4.

10. La topologia dell'intervallo annidato (nested interval topology). Sia $X = (0, 1)$ Consideriamo su X la topologia: $\mathcal{T} := \{(0, 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\emptyset, X\}$ (verificare che è una topologia). Dimostrre che $(X, \mathcal{T})$ soddisfa l'assioma T4 ma non il T0 (nè dunque il T1 e T2) nè il T3:

11. (a) Dimostrare che se X e Y sono due spazi Ti allora $X \times Y$ è Ti per $i = 0, 1, 2, 3$.

    (b) Dimostrare che vale anche il viceversa.

12. (a) Dimostrare che se il prodotto di due spazi $X \times Y$ è T4, allora sia X sia Y sono T4.

    (b) Non vale il viceversa: dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è normale (Munkres pag.198).

13. (a) Dimostrare che X è T3 se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno V di x esiste un aperto U tale che $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

    (b) Dimostrare che X è T4 se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni aperto V tale che $C \subseteq V$ esiste un aperto U tale che $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

14. Sia X uno spazio topologico, sia Y un insieme. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Sia $\mathcal{T}_f$ la topologia quoziente su Y. Dimostrare che $C \subseteq Y$ è chiuso per $\mathcal{T}_f$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

15. Siano X e Y spazi topologici e sia $p : X \times Y \to X$ la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

    (a) l'applicazione p è aperta;

    (b) l'applicazione p è chiusa;

    (c) lo spazio X è omeomorfo al quoziente $X \times Y/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $x = x'$.

16. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un esempio di un sottospazio $Y \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Y$ sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio $Z \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}/Z$ non sia di Hausdorff.

17. Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ mappe quozienti. Allora la composizione $g \circ f$ è una mappa quoziente.

18. (Munkres Ch.2, sec.22: esistono applicazioni quoziente aperte e non chiuse, chiuse e non aperte e nè aperte nè chiuse).

    (a) Siano $X := [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$, $Y := [0,2] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea $\mathcal{T}_e$. Definiamo un'applicazione $p: X \to Y$:

    $$p(x) := \begin{cases} x \text{ se } x \in [0,1] \\ x-1 \text{ se } x \in [2,3] \end{cases}$$

    Verificare che p è continua chiusa e suriettiva (dunque è un'identificazione chiusa) ma non aperta.

    (b) Sia $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione sul primo fattore (con topologia euclidea). Verificare che p è un'identificazione aperta ma non chiusa.

    (c) Sia $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ il sottospazio

    $$A := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ oppure } y = 0 \text{ o entrambi}\}.$$

    Dimostrare che $p_{|A}: A \to \mathbb{R}$ è una mappa quoziente (un'identificazione) che non è nè aperta nè chiusa.

19. Sia $X = [0,1]$ con la relazione di equivalenza definita da $x \sim y$ se $x = y$ oppure $\{x,y\} = \{0,1\}$.

    (a) Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1, e che la proiezione al quoziente $\pi: X \to X/\sim$ è un'identificazione chiusa.

    (b) Dimostrare che la restrizione a $[0,1)$ dell'applicazione $\pi: X \to X/\sim$ è biettiva e continua ma non è un omeomorfismo di $[0,1)$ su $X/\sim$ (in altre parole $\pi_{|[0,1)}$ non è un'identificazione).

20. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X è uno spazio $T1$ se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

21. (La lingua biforcuta). Sia B un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico $X = R \times B$ definiamo la relazione di equivalenza

    $$(x,a) \sim (y,b) \text{ se } (x,a) = (y,b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

    Provare che $X/\sim$ è unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$ e che non è di Hausdorff.

22. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico $X \longrightarrow X/S$ è chiusa/aperta se S è chiuso/aperto in X. Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).

23. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso unitario e $S^1 \subset D$ la circonferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio D/S^1 in cui S^1 è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera S^2.

24. (a) Dimostrare che uno spazio compatto e T2 è normale;

    (b) Sia X uno spazio normale e $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente X/C è normale.

25. Si dotino $[-1,1]$ e $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ delle usuali topologie euclidee e sia $X := [-1,1] \times S^1$ con la topologia prodotto. Sia poi $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$. Sia $\pi\colon X \longrightarrow X/Y$ la contrazione di Y ad un punto. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.

    (a) Lo spazio X/Y è di Hausdorff?

    (b) Lo spazio X/Y è normale?

    (c) Lo spazio X/Y è metrizzabile?

    (d) Gli spazi X e X/Y sono omeomorfi?

    (e) Stabilire se π è aperta e/o chiusa.

26. Sia T il toro ottenuto come identificazione di figura piana $Q/\sim$ dove $Q = [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ e $(x,y) \sim (x',y')$ se e solo se $(x,y) = (x',y')$ oppure $\{x,x'\} = \{\pm 1\}$ e $y = y'$, oppure $\{y,y'\} = \{\pm 1\}$ e $x = x'$. Dimostrare che $T \sim S^1 \times S^1$.

27. (Manetti, 5.12): esempio di identificazioni il cui prodotto non è una identificazione.

    Sia $f\colon \mathbb{R} \to X$ una identificazione tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni $x + y = n + \sqrt{2}/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

    (a) f è una identificazione chiusa;

    (b) C è chiuso ed è saturo rispetto a $f \times Id\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to X \times \mathbb{Q}$.

    (c) $(f \times Id)(C)$ non è chiuso nella topologia prodotto;

    (d) $f \times Id$ non è una identificazione.