

### ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2017/18

1. Dimostrare che  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è omeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}_+$ .
2. (Manetti 3.49) Siano  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Z \rightarrow W$  due applicazioni di spazi topologici e denotiamo

$$f \times g: X \times Z \rightarrow Y \times W$$
$$(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z)).$$

- (a) Provare che se  $f$  e  $g$  sono continue, allora  $f \times g$  è continua.
  - (b) Provare che se  $f$  e  $g$  sono aperte, allora  $f \times g$  è aperta.
  - (c) Mostrare con un esempio che se  $f$  e  $g$  sono chiuse, allora  $f \times g$  può non essere chiusa.
3. (Manetti 3.51) Siano  $X, Y$  spazi topologici,  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  sottoinsiemi. Dimostrare che  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ . In particolare se  $A$  e  $B$  sono chiusi allora  $A \times B$  è chiuso nel prodotto.
  4. Sia  $Y = \{x, y\}$  un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme  $Y \times Y$  che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su  $Y$ .
  5. Sia  $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$  è una figura piana che non interseca l'asse  $z$ ; dimostrare che il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse  $z$  è omeomorfo a  $F \times S^1$ .
  6. Indichiamo con  $\mathbb{R}_S$  la retta di Sorgenfrey  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ .
    - (a) Dimostrare che il sottospazio  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x + y = 0\}$  è discreto.
    - (b) Dimostrare che il sottospazio  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x - y = 0\}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}_S$ .
  7. Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua suriettiva. Poniamo

$$R = \{(x, x_0) \mid f(x) = f(x_0)\} \subseteq X \times X.$$

- (a) Dimostrare che se  $Y$  è di Hausdorff  $R$  è un chiuso in  $X \times X$ .
- (b) Dare un esempio in cui  $R$  è un chiuso ma  $Y$  non è di Hausdorff.
- (c) Mostrare che se  $R$  è chiuso in  $X \times X$  e  $f$  è aperta allora  $Y$  è di Hausdorff.

8. (a) Dimostrare che un sottospazio di uno spazio  $T_i$  è  $T_i$  per  $i = 0, 1, 2$ .  
 (b) Dimostrare che il prodotto di due spazi  $T_i$  è  $T_i$  per  $i = 0, 1, 2$ .  
 (c) Dimostrare che vale anche il viceversa dell'affermazione 8b.
9. Dimostrare che  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  non è normale (Munkres pag.198).
10. Dimostrare che uno spazio topologico  $X$  con un numero finito di elementi che sia  $T_1$  ha la topologia discreta. Pertanto è  $T_2, T_3, T_4$ .
11. Dimostrare che  $T_0 + T_3 \Rightarrow$  regolare.
12. La topologia dell'intervallo annidato (nested interval topology). Sia  $X = (0, 1)$  Consideriamo su  $X$  la topologia:  $\mathcal{T} := \{(0, 1 - 1/n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\emptyset, X\}$  (verificare che è una topologia). Dimostrare che  $(X, \mathcal{T})$  soddisfa l'assioma  $T_4$  ma non il  $T_0$  (nè dunque il  $T_1$  e  $T_2$ ) nè il  $T_3$ :
13. Sia  $X$  uno spazio topologico, sia  $Y$  un insieme. Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione suriettiva. Sia  $\mathcal{T}_f$  la topologia quoziente su  $Y$ . Dimostrare che  $C \subseteq Y$  è chiuso per  $\mathcal{T}_f$  se e solo se  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $X$ .
14. Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e sia  $p: X \times Y \rightarrow X$  la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
  - (a) l'applicazione  $p$  è aperta;
  - (b) l'applicazione  $p$  è chiusa;
  - (c) lo spazio  $X$  è omeomorfo al quoziente  $X \times Y / \sim$  dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza  $(x, y) \sim (x', y')$  se e solo se  $x = x'$ .
15. Sia  $\mathbb{R}$  la retta reale con la topologia euclidea; si forniscano un esempio di un sottospazio  $Y \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $\mathbb{R}/Y$  sia di Hausdorff e un esempio di un sottospazio  $Z \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $\mathbb{R}/Z$  non sia di Hausdorff.
16. Siano  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  mappe quozienti. Allora la composizione  $g \circ f$  è una mappa quoziente.
17. (Munkres Ch.2, sec.22: esistono applicazioni quoziente aperte e non chiuse, chiuse e non aperte e nè aperte nè chiuse).
  - (a) Siano  $X := [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}, Y := [0, 2] \subset \mathbb{R}$  con la topologia indotta da quella euclidea  $\mathcal{T}_e$ . Definiamo un'applicazione  $p: X \rightarrow Y$ :

$$p(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Verificare che  $p$  è continua chiusa e suriettiva (dunque è un'identificazione chiusa) ma non aperta.

(b) Sia  $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la proiezione sul primo fattore (con topologia euclidea). Verificare che  $p$  è un'identificazione aperta ma non chiusa.

(c) Sia  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  il sottospazio

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ oppure } y = 0 \text{ o entrambi}\}.$$

Dimostrare che  $p|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$  è una mappa quoziente (un'identificazione) che non è né aperta né chiusa.

18. Sia  $X = [0, 1]$  con la relazione di equivalenza definita da  $x \sim y$  se  $x = y$  oppure  $\{x, y\} = \{0, 1\}$ .

(a) Dimostrare che  $X/\sim$  è omeomorfo a  $S^1$ , e che la proiezione al quoziente  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  è un'identificazione chiusa.

(b) Dimostrare che la restrizione a  $[0, 1)$  dell'applicazione  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  è biettiva e continua ma non è un omeomorfismo di  $[0, 1)$  su  $X/\sim$  (in altre parole  $\pi|_{[0,1)}$  non è un'identificazione).

19. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio  $X$  è uno spazio  $T1$  se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di  $X$ .

20. (La lingua biforcuta). Sia  $B$  un insieme con due elementi dotato della topologia discreta. Sullo spazio topologico  $X = \mathbb{R} \times B$  definiamo la relazione di equivalenza

$$(x, a) \sim (y, b) \text{ se } (x, a) = (y, b) \text{ oppure se } x = y < 0.$$

Provare che  $X/\sim$  è unione di due aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}$  e che non è di Hausdorff.

21. (Manetti 5.9) Mostrare che, al variare di  $A$  tra i sottoinsiemi di  $[0, 1]$  formati da due punti distinti, lo spazio quoziente  $[0, 1]/A$  può assumere tre diverse classi di omeomorfismo.

22. Dimostrare che la contrazione a un punto di un sottoinsieme di uno spazio topologico  $X \rightarrow X/S$  è chiusa/aperta se  $S$  è chiuso/aperto in  $X$ . Fare dei controesempi all'implicazione inversa (sugg: usare la topologia concreta).

23. Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  il disco chiuso unitario e  $S^1 \subset D$  la circonferenza unitaria. Dimostrare che lo spazio  $D/S^1$  in cui  $S^1$  è contratto a un punto è omeomorfo alla sfera  $S^2$ .

24. Uno spazio si dice *normale* se i punti sono chiusi (è  $T1$ ) e dati due qualunque chiusi disgiunti  $C, D \subset X$ , esistono due aperti disgiunti  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  tali che  $C \subseteq \mathcal{U}, D \subseteq \mathcal{V}$ .

(a) Dimostrare che uno spazio compatto e  $T2$  è normale;

- (b) Sia  $X$  uno spazio normale e  $C \subseteq X$  un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente  $X/C$  è normale.
25. Si dotino  $[-1, 1]$  e  $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  delle usuali topologie euclidee e sia  $X := [-1, 1] \times S^1$  con la topologia prodotto. Sia poi  $Y := \{0\} \times S^1 \subset X$ . Sia  $\pi: X \rightarrow X/Y$  la contrazione di  $Y$  ad un punto. Rispondere -giustificando le risposte- alle seguenti domande.
- (a) Lo spazio  $X/Y$  è di Hausdorff?
  - (b) Lo spazio  $X/Y$  è normale?
  - (c) Lo spazio  $X/Y$  è metrizzabile?
  - (d) Gli spazi  $X$  e  $X/Y$  sono omeomorfi?
  - (e) Stabilire se  $\pi$  è aperta e/o chiusa.
26. Sia  $T$  il toro ottenuto come identificazione di figura piana  $Q/\sim$  dove  $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  e  $(x, y) \sim (x', y')$  se e solo se  $(x, y) = (x', y')$  oppure  $\{x, x'\} = \{\pm 1\}$  e  $y = y'$ , oppure  $\{y, y'\} = \{\pm 1\}$  e  $x = x'$ . Dimostrare che  $T \sim S^1 \times S^1$ .
27. (Manetti, 5.12): esempio di identificazioni il cui prodotto non è una identificazione. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$  una identificazione tale che  $f(x) = f(y)$  se e solo se  $x = y$  oppure  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Denotiamo con  $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni  $x + y = n + \sqrt{2}/n$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostrare che:
- (a)  $f$  è una identificazione chiusa;
  - (b)  $C$  è chiuso ed è saturo rispetto a  $f \times Id: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow X \times \mathbb{Q}$ .
  - (c)  $(f \times Id)(C)$  non è chiuso nella topologia prodotto;
  - (d)  $f \times Id$  non è una identificazione.