Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 3

a.a. 2016/2017

1. Vero o falso:

   (a) La chiusura di un sottospazio discreto è ancora un sottospazio discreto.

   (b) Ogni sottospazio discreto di uno spazio metrico è chiuso.

2. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiuso).

3. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ il sottospazio (a, b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ i sottospazi $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$. Dunque questi sottospazi sono tutti nella stessa classe di omeomorfismo.

   Dimostrare che anche i sottospazi $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ sono omeomorfi ta loro.

4. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

5. (Manetti 3.41) Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W$$

$$(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z)).$$

   (a) Provare che se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.

   (b) Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.

   (c) Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.

6. (Manetti 3.43) Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

7. Sia $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è una figura piana che non interseca l'asse z; dimostrare che il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse z è omeomorfo a $F \times S^1$.

8. Indichiamo con $\mathbb{R}_S$ la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

   (a) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x + y = 0\}$ è discreto.

   (b) Dimostrare che il sottospazio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \mid x - y = 0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}_S$.