Geometria I

Università dell'Insubria

Lidia Stoppino

Esercizi 2

a.a. 2018/2019

1. Sia $f\colon (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
   (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;
   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;
   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.

2. Sia X un insieme non vuoto, siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ due topologie su X. Sia $f\colon X \to X$ l'applicazione identica ($f(x) = x$ per ogni $x \in X$). Dimostrare che:
   (a) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è continua se e solo se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$;
   (b) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è aperta se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;
   (c) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è chiusa se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;
   (d) $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è un omeomorfismo se e solo se $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare le seguenti affermazioni:
   (a) Se X ha la proporietà che ogni applicazione da X a qualunque spazio topologico Y è continua, allora X è uno spazio discreto.
   (b) Se X ha la proporietà che per ogni spazio topologico Y ogni applicazione da Y a X è continua, allora X è uno spazio con la topologia concerta.

4. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y
$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$
   (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y.
   (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y.
   (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.

5. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

(c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f: X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

6. Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X. Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$. Dimostrare (quindi esibire un controesempio) che l'analoga affermazione non vale per i chiusi: non è vero che se $f(X \setminus A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{B}$, allora f è chiusa.

7. Dimostrare che se $f: X \longrightarrow Y$ è un'applicazione biiettiva tra spazi topologici, f è aperta se e solo se è chiusa.

8. Fare un esempio di un'applicazione tra spazi topologici che sia:

   (a) aperta e chiusa ma non continua;

   (b) continua e aperta e non chiusa;

   (c) continua e chiusa e non aperta.

9. Sia $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X (sugg: qui serve la "formula di proiezione" (Manetti Prop. 2.2): se in generale $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sono sottoinsiemi, vale che $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$). Dimostrare che se togliamo l'ipotesi che f sia aperta l'implicazione non vale necessariamente.

10. Un'applicazione $f: X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}: A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.

    (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.

    (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da

    $$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

    è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.

    (c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

    (d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f: X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X.

11. Manetti 3.47: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.

12. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè f nè g sono continue g la loro composizione $g \circ f$ non è continua.

    (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.

    (c) Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f non è continua e g è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

13. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ la retta reale con la topologia cofinita (in cui gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti).

    (a) $f(x) = \sin(x)$ è una funzione continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

    (b) Le funzioni polinomiali sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

    (c) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$?

    (d) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

14. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g \colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ le funzioni definite ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ x \text{ se } x < 1. \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x > 1 \\ x \text{ se } x \leq 1. \end{cases}$$

    Si discuta la continuità di f e di g.

15. Mostrare che le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ sono le funzioni f tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall y \in (x - \delta, x + \delta)$ $f(y) > f(x) - \epsilon$.

16. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) La chiusura di un sottospazio discreto è ancora un sottospazio discreto.

    (b) Ogni sottospazio discreto di uno spazio topologico è chiuso.

    (c) Ogni sottospazio discreto di uno spazio metrizzabile è chiuso.

    (d) Un sottospazio finito di uno spazio topologico èsempre discreto.

    (e) Un sottospazio finito di uno spazio metrizzabile èsempre discreto.

17. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ il sottospazio (a, b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ i sottospazi $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$. Dunque questi sottospazi sono tutti nella stessa classe di omeomorfismo.

    Dimostrare che anche i sottospazi $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ sono omeomorfi ta loro, e sono omoeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

18. Dimostrare che due rette in $\mathbb{R}^2$ (con la topologia indotta da quella euclidea) sono sempre omeomorfe tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.