Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 2

a.a. 2016/2017

1. Sia $f\colon (X,\mathcal{S}) \longrightarrow (Y,\mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
   (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;
   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;
   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.

2. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiusa).

3. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$

   (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y.
   (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y.
   (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.

4. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
   (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
   (c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici è chiusa.

5. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X. Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

6. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(Y)$ è denso in X.

7. Un'applicazione $f\colon X \longrightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f_{|A}\colon A \longrightarrow B$ è un omeomorfismo.
   (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.
   (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definita da

$$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

   è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.

(c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

(d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f\colon X \longrightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X.

8. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se nè f nè g sono continue g la loro composizione $g \circ f$ non è continua.

   (b) L'inversa di una applicazione biiettiva non continua non è continua.

   (c) Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f non è continua e g è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.

9. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ la retta reale con la topologia cofinita (in cui gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti).

   (a) $f(x) = \sin(x)$ è una funzione continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

   (b) Le funzioni polinomiali sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?

   (c) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$?

   (d) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

10. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ le funzioni definite ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ x \text{ se } x < 1. \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x+1 \text{ se } x > 1 \\ x \text{ se } x \leq 1. \end{cases}$$

    Si discuta la continuità di f e di g.

11. Mostrare che le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ sono le funzioni f tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall y \in (x - \delta, x + \delta)$ $f(y) > f(x) - \epsilon$.

12. Manetti 3.47: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.