Geometria I

Università dell'Insubria

Esercizi 1

a.a. 2016/2017

1. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

   (a) I punti di uno spazio topologico sono sempre sottoinsiemi chiusi.

   (b) Esistono spazi topologici in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.

   (c) Esistono spazi topologici metrizzabili in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.

   (d) Esistono spazi topolgici in cui i punti sono sia chiusi sia aperti.

2. La famiglia $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ è una topologia su $\mathbb{R}$?

3. Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.

4. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.

5. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle.

6. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

   - $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
   - $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i\{|x_i - y_i|\}$.

   (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;

   (b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;

   (c) Le metriche d e d' sono topologicamente equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$?

7. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica eulcidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono una base per la topologia euclidea.

   (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;

   (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;

   (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

8. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la funzione $d' \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}, \text{ per ogni } x, y \in X.$$

(a) Dimostrare che d' è una metrica su X tale che $d'(x, y) < 1$ $\forall x, y \in X$ (d' si chiama normalizzazione della metrica d).

(b) Dimostrare che d e d' sono topologicamente equivalenti.

(c) Dimostrare che non esistono due numeri reali a e b tali che per ogni $x, y \in X$ vale che

$$ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq bd(x, y).$$

9. Sia X l'insieme

$$X = \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

(a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X.

(b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d:

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$

10. Sia $X = \{2, 3, ...\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

(a) Dimostrare che gli U_n, al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X.

(b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T2? I suoi punti sono chiusi?

(c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

11. Si consideri la metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$. Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ sia

$$C_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(x, p) \leq r\}.$$

(a) Dimostrare che $C_r(p)$ è la chiusura della palla di raggio r centrata in p.

(b) Si dica se esiste una topologia su $\mathbb{R}^n$ per la quale la famiglia $\mathcal{C} := \{C_r(p), r > 0, p \in \mathbb{R}^n\}$ è una base.

(c) Qual'è la topologia generata da $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^n$?

12. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

13. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

14. Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *non* è una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

15. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che

$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \overline{S}.$$

(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

16. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi A, $B \subseteq X$ vale che:

    (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

    (b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

    (c) Fare un esempio in cui l'inclusione del punto sopra può essere stretta.

17. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme

$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n > 0 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

    (a) X è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$? E in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

    (b) In entrambi i casi, qual'è la chiusura di X?

18. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Siano $E = (0, 1), F = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di E ed F con le seguenti topologie:

    (a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;

    (b) La topologia concreta $\mathcal{C}$;

    (c) La topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);

    (d) La topologa euclidea $\mathcal{T}_e$;

    (e) La topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;

    (f) La topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$.